Série A, n° 3314
N° d'ordre : 4186

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

le grade de Docteur ès-sciences physiques

par

Michel POLOUJADOFF

PREMIÈRE THÈSE : **Contribution à l'étude des moteurs asynchrones monophasés.**

DEUXIÈME THÈSE : **Propositions données par la Faculté.**

Soutenues le 12 mars 1960, devant la Commission d'examen.

JURY :

MM. P. AIGRAIN, *Président.*
P. GRIVET, *Examinateurs.*
PH. OLMER, *Examinateurs.*

12, Place Henri-Bergson, 12
PARIS (VIII^e^)
1960

Série A, n° 3314
N° d'ordre : 4186

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

le grade de Docteur ès-sciences physiques

par

Michel POLOUJADOFF

PREMIÈRE THÈSE : **Contribution à l'étude des moteurs asynchrones monophasés.**

DEUXIÈME THÈSE : **Propositions données par la Faculté.**

Soutenues le 12 mars 1960, devant la Commission d'examen.

JURY :

MM. P. AIGRAIN, *Président.*
P. GRIVET, *Examinateurs.*
PH. OLMER, *Examinateurs.*

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

RGE

12, Place Henri-Bergson, 12
PARIS (VIII^e^)
1960

Faculté des Sciences de l'Université de Paris

Doyen ..... J. PÉRÈS

Professeurs.

MM.	G. JULIA	T	Analyse et Algèbre supérieures.
	DE BROGLIE	T	Théories physiques.
	PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
	GARNIER	T	Géométrie supérieure.
	PÉRÈS	T	Mécanique des fluides.
	M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).
	BARRABÉ	T	Géologie structurale et appliquée.
	J. BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
	PLANTEFOL	T	Botanique.
	GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.
	PREVOST	T	Chimie organique.
	BOULIGAND	T	Applic. de l'analyse à la géométrie.
	CHAUDRON	T	Chimie appliquée.
	WYART	T	Minéralogie.
	TEISSIER	T	Zoologie.
	MANGENOT	T	Biologie végétale.
	P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.
	MONNIER	T	Physiologie des fonctions.
	PIVETEAU	T	Paléontologie.
	ROCARD	T	Physique (E.N.S.).
	H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).
	LAFFITTE	T	Chimie générale.
	FAVARD	T	Géométrie supérieure.
	COULOMB	T	Physique du Globe.
Mlle	COUSIN	T	Biologie animale (S.P.C.N.).
MM.	CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
	P. DRACH	T	Zoologie.
	KASTLER	T	Physique (E.N.S.).
	EPHRUSSI	T	Génétique.
	WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
	RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.).
	GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).
	LUCAS	T	Recherches physiques.
	A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.
	ARNULF	T	Optique appliquée.
	M. MORAND	T	Enseignement de Physique.
	SOLEILLET	T	Physique.
	FORTIER	T	Mécan. expérimentale des fluides.
	DANJON	T	Astronomie.
	LAPORTE	T	Physique générale et radioactivité.
	JANET	T	Mécaniques analytique et céleste.
	PETIT	T	Biologie maritime.
	QUENEY	T	Météorol. et dynamique atmosphér.
	GALLIEN	T	Embryologie.
	EICHHORN	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
	DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mlle	CAUCHOIS	T	Chimie physique.
MM.	THELLIER	T	Physique du Globe.
	AUDUBERT	T	Electrochimie.
	L'HÉRITIER	T	Génétique.
	GRIVET	T	Radioélectricité.
	PONCIN	T	Mécanique générale.
	DUBREIL	T	Arithmét. et théorie des nombres.
	QUELET	T	Chimie organique.
	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
	CUVILLIER	T	Géologie structurale et appliquée.
	JUNG	T	Pétrographie.
	TRILLAT	T	Microscopie. Diffract. électronique.
	WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.
	JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physique céleste.
	VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
	DESTOUCHES	T	Théories physiques.
	M. PRUVOST	T	Géologie.
	AMIEL	T	Chimie générale (P.C.B.).
	HOCART	T	Minéralogie.
	J.-P. MATHIEU	T	Physique (P.C.B.).
	COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
	MAY	T	Biologie animale (P.C.B.).
	CHOQUET	T	Calcul différentiel et intégral.
	FELDMANN	T	Biologie (P.C.B.).
	GUINIER	T	Physique des solides (P.C.B.).
	JOST	T	Physiologie comparée.
	FORTET	T	Calcul des probabilités.
	SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et intégral.
	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
	MALAVARD	T	Aviation.
MM.	BRÉLOT	T	Calcul différentiel.
	NORMANT	T	Chimie organique.
	BENARD	T	Chimie minérale.
	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
	DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.
	GELOSO	T	Chimie (S.P.C.N.).
	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
	ULRICH	T	Physiologie végétale.
	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
	CHADEFAUD	T	Botanique.
	DESTRIAU	T	Physique (M.P.C.).
Mlle	LE BRETON	T	Physiologie générale.
MM.	SALEM	T	Mathématiques générales.
	LELONG	T	Mathématiques générales.
	DEVILLERS		Anatomie et Histologie comparées.
	EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
	FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
	GLANGEAUD	T	Géogr. physique et géol. dynamique
	GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).
	PISOT	T	Calcul des probabilités.
	E. ROCH	T	Géologie.
	SCHATZMANN		Astrophysique.
	TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
	JOLIOT	T	Physique nucléaire et radioactivité.
	LENNUIER		Physique (M.P.C.).
	RIZET		Génétique.
	ROUTHIER		Géologie appliquée.
Mme	TONNELAT	T	Théories physiques.
MM.	DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
	SOUCHAY	T	Chimie générale.
	AIGRAIN	T	Electrotechnique.
	BRUSSET		Chimie minérale.
	M. LEVY		Physique théorique.
Mmes	CHAIX		Chimie biologique.
	HUREL-PY		Biologie végétale (P.C.B.).
MM.	PIAUX		Chimie (P.C.B.).
	BRUN		Mécan. expérim. des fluides.
	LEDERER	T	Chimie des substances nat.
Mmes	DUBREIL	T	Mathématiques.
	LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.).
MM.	BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).
	COTTE	T	Physique (M.P.C.).
	J. DUBOIS	T	Chimie (S.P.C.N.).
	LAMOTTE		Zoologie (E.N.S.).
	LE ROLLAND		Mécanique des fluides.
	MICHEL	T	Chimie (S.P.C.N.).
	OLMER	T	Énergétique générale.
	ROUAULT	T	Physique générale.
	GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
	BARCHEWITZ		Chimie physique.
	BROSSEL		Physique atomique.
	BUSER		Biologie animale (P.C.B.).
	CAMUS		Biologie végétale (P.C.B.).
	CASTAING		Physique générale.
	CURIEN		Minéralogie. Cristallographie.
	MOYSE		Physiologie végétale.
	NOIROT		Évolution des êtres organisés.
	PANNETIER		Chimie (S.P.C.N.).
	POSSOMPÈS		Biologie animale (P.C.B.).
	PULLMANN		Chimie théorique.
	TEILLAC		Physique nucléaire et radioactivité.
	TONNELAT		Biologie physico-chimique.
	VILLE		Économétrie.
	WILLEMART		Chimie (P.C.B.).
	DODE	T	Chimie.
	FREYMANN	T	Physique (S.P.C.N.).
	GUINOCHET	T	Biologie végétale (Orsay).
	ROLLET	T	Chimie (P.C.B.).
Mlle	JOSIEN	T	Chimie (P.C.B.).
MM.	CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique.
	ARNOULT	T	Physique (Orsay).
	CHAPELLE	T	Physique (P.C.B.).
	DELARGE	T	Mathématiques (Orsay).
	DENY	T	Mathématiques (Orsay).
	P. GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.
	G. LUCAS	T	Géologie.

Secrétaire général ..... C. MONIER

A la mémoire du Professeur ESCLANGON

C'est d'après les suggestions de M. J. Polard, Professeur à l'École supérieure d'Électricité, Ingénieur en Chef à la Compagnie Électro-Mécanique, qu'a été entreprise l'étude suivante. Nous sommes heureux de pouvoir lui présenter le témoignage de notre gratitude pour la sollicitude et l'intérêt dont il n'a cessé de faire preuve à notre égard.

Sur l'intervention du regretté Maurice Laborde, Directeur à Électricité de France, dont nous saluons ici la mémoire, le Professeur Félix Esclangon avait bien voulu s'intéresser à nos travaux et nous avait accueilli dans son Laboratoire.

Qu'il nous soit permis de venir modestement nous joindre à tous ceux qui, depuis sa mort tragique, le 5 mai 1956, ont rendu hommage en termes inoubliables, au Savant, au Professeur, à l'Homme ;

Et qu'il nous soit permis de dédier ce travail à sa mémoire, en reconnaissance de l'aide morale et matérielle qu'il nous a apportée et qui a grandement facilité notre tâche.

Notre reconnaissance va également à MM. les Professeurs Ph. Olmer et P. Grivet dont l'appui, après la disparition de F. Esclangon, nous a permis de poursuivre notre étude.

Nous adressons nos remerciements :

— à M. Georges Darrieus, Membre de l'Institut ;

— à M. Gilbert Nasse, Directeur du Centre de Recherches et d'Essais de Fontenay (Électricité de France),

pour l'intérêt qu'ils ont pris à nos travaux.

Nous remercions enfin le Laboratoire central des Industries électriques, qui nous accueillit durant la préparation de notre travail et dont les ingénieurs nous ont apporté une aide constante.

Introduction

Les moteurs à bobines-écrans (quelquefois appelés moteurs « shaded pole » ou encore moteurs à spires de déphasage) sont connus depuis fort longtemps, puisque le premier brevet qui leur est relatif date de 1895. Ils sont de fabrication très simple, donc très économiques, parce qu'ils sont à pôles entiers, comme les machines à courant continu ; mais, pour la même raison, leur rendement est très faible ; en outre, leur couple de démarrage est très inférieur au couple nominal. Leur application a donc été limitée, pendant longtemps, aux cas nécessitant de faibles puissances et un démarrage à vide (ventilateurs, petits groupes motopompes...).

Mais, depuis la guerre 1939-1945, un certain nombre de constructeurs en ont fabriqués de relativement puissants (une centaine de watts) avec un rendement acceptable (30 à 50 %). Corrélativement, plusieurs études théoriques furent publiées. Parmi celles-ci, il faut citer celle de l'Ingénieur américain Trickey qui, en 1947, compléta une publication antérieure ; les thèses de Bojer (1947) et Morath (1949). En 1949, le Professeur Kucera publia un article qui reprenait, sous une forme très originale, les idées de Trickey. En 1950 et 1951, Chang et Kron se tournaient vers les réseaux analogiques. Enfin, en 1953, l'Ingénieur allemand Schuisky donna une étude similaire à celle de Morath.

Si l'on compulse la littérature technique parue depuis plus de soixante ans, on trouvera plus d'une centaine d'articles d'un grand intérêt, traitant des moteurs monophasés à bobinages répartis et à entrefer constant. On ne s'étonnera donc pas de constater qu'une dizaine de publications n'aient pas épuisé le problème des moteurs à bobines-écrans, dont les deux bobinages sont concentrés, dont l'entrefer est souvent variable, et qui comportent presque toujours un pont magnétique dont le fonctionnement est très complexe à cause des phénomènes de saturation.

Nous avons commencé, dans une première partie, par examiner la théorie dite « du champ transversal » du moteur asynchrone monophasé, et nous avons conduit cette étude de manière à pouvoir la généraliser, par la suite, à des cas plus complexes.

Puis, nous examinons la théorie du moteur à bobines-écrans, en nous limitant au cas où l'entrefer est constant et où il n'existe pas de pont magnétique saturé. Il est possible d'arriver à des méthodes de calcul assez simples, à condition de ne pas chercher à résoudre d'emblée le système d'équations des courants.

Enfin, dans une troisième partie, nous examinerons la théorie du moteur à cage d'écureuil le plus général ; ceci est possible à partir du moment où l'on a défini une inductance propre cyclique dans un système à structure polyphasée dyssymétrique parcouru par des courants périodiques non sinusoïdaux, mais soumis à certaines restrictions. Cette théorie peut s'appliquer à l'étude complète directe des moteurs à bobines-écrans.

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude des moteurs asynchrones monophasés

PREMIÈRE PARTIE : La théorie dite « du champ transversal »

I. Introduction. — Considérons un conducteur dont l'abscisse angulaire θ est une fonction du temps, l'induction dans l'entrefer en un point donné étant également fonction du temps. Pour calculer la force électromotrice dans ce barreau, évaluons le flux traversant, à un instant t, le circuit formé par le barreau lui-même, un barreau fixe, et deux conducteurs latéraux Ce flux φ est évidemment le produit d'une fonction du temps par une fonction de l'espace, soit

$$\varphi = f(\theta)h(t),$$

d'où la force électromotrice engendrée dans le barreau

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -f(\theta)\frac{dh(t)}{dt} - h(t)\frac{df(\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}.$$

Le premier terme est la force électromotrice qui serait engendrée dans le barreau, par effet de transformation, s'il était immobile. Le deuxième correspond à la force électromotrice qui y serait engendrée si l'induction était constante dans le temps : c'est la force électromotrice de vitesse.

Pour expliquer physiquement le fonctionnement du moteur à induction monophasé, on assimile le rotor à un induit de machine à courant continu, muni de deux lignes de balais en court-circuit, placées à angle droit [6] (1). En effet, la force électromotrice de transformation est répartie à chaque instant d'une manière symétrique par rapport à l'axe de l'inducteur, et on peut penser que le courant auquel elle donne lieu possède la même symétrie. Dans ces conditions, le remplacement de la cage d'écureuil par l'enroulement en tambour modifie la répartition des ampères-tours sans modifier les résultats qualitatifs. On peut raisonner de même pour la force électromotrice de vitesse.

Soit Φ le flux traversant l'inducteur, I_0 le courant magnétisant correspondant (fig. 1a et 1b) :

a) Dans l'enroulement 3 est induite une force électromotrice de vitesse E_3 qui engendre un courant I_3. L'impédance qui s'oppose au passage du courant I_3 se compose de la réactance de fuites de l'enroulement et de la réactance d'entrefer. Le courant I_3 est donc déphasé, sur E_3 d'un angle voisin de $\pi/2$ et provoque la naissance d'un flux transversal Φ_t en phase avec lui.

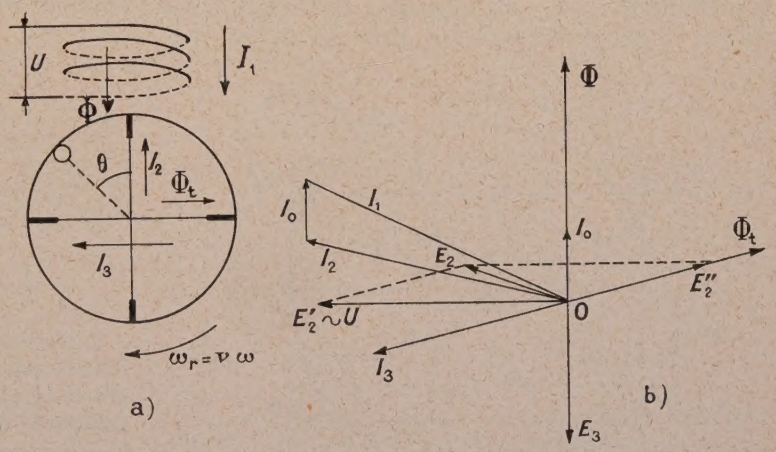

Fig. 1. — Schéma d'un moteur asynchrone monophasé dont le rotor est assimilé à un induit de machine à courant continu muni de deux lignes de balais en court-circuit et perpendiculaires entre elles (fig. 1a) et diagramme vectoriel correspondant (fig. 1b).

b) Dans l'enroulement 2 est induite une force électromotrice E'_2 de transformation créée par Φ et une force électromotrice de vitesse E''_2 créée par Φ_t. La force électromotrice résultante E_2 donne lieu à un courant I_2.

c) Le courant dans le primaire est égal à $I_0 + I_2$. On peut remarquer que l'on a approximativement, en

(1) Ce nombre entre crochets et ceux qui suivent se rapportent à la bibliographie figurant en page 42.

appelant v le rapport de la vitesse actuelle du rotor à la vitesse de synchronisme
$E_3 = vE'_2$, $E''_2 = vE_3 = v^2E'^2$, d'où $E_2 = (1 - v^2)E'_2$; donc le courant I_2 est approximativement proportionnel à $1 - v^2$.

d) Le couple électrique est la résultante de deux termes : un couple générateur $\Phi \times I_3$, correspondant aux pertes qui accompagnent le maintien d'un flux Φ_t dans l'axe transversal et un couple moteur $\Phi_t \times I_2$. Or, I_2 est nul pour $v = 1$, I_3 ne peut s'annuler en marche, et le couple résultant est nul pour $\Phi I_3 = \Phi_t I_2$, donc la marche à vide aura lieu légèrement au-dessous du synchronisme.

Nous étudierons la théorie des deux réactions en supposant que la répartition du champ est sinusoïdale dans l'entrefer et nous commencerons par préciser la notion d'enroulement sinusoïdalement réparti. Puis nous examinerons le cas d'un moteur à rotor bobiné. Dans le cas des moteurs à cage d'écureuil, nous pourrions considérer la cage comme un ensemble d'enroulements à une barre par enroulement ; mais cette manière de faire ne permet pas de calculer facilement les coefficients de dispersion ; nous aborderons donc le problème directement.

Notons qu'on a effectivement réalisé des moteurs monophasés comportant un induit à courant continu muni de deux lignes de balais [7].

II. Enroulements à répartition sinusoïdale. — A. **Définition.** — Un enroulement à répartition sinusoïdale est un enroulement qui, parcouru par un courant i, produit le long d'un entrefer de longueur constante un champ d'induction

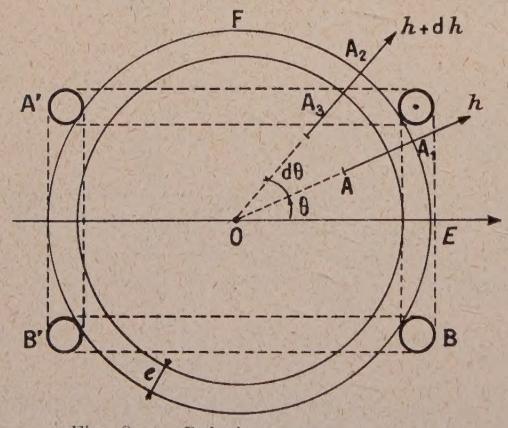

Fig. 2. — Relation entre n, i et h.

$$b = b_m \cos p\theta,$$

p étant le nombre de paire de pôles et b_m l'induction maximale proportionnelle à i. Si $i = I_m \cos \omega t$ on aura

$$b_m = B_m \cos \omega t.$$

Soit n le nombre de conducteurs par radian géométrique ; n sera considéré comme positif lorsque le sens positif de parcours le long des conducteurs de l'enroulement ira de l'arrière vers l'avant de la figure ; les angles sont comptés dans le sens trigonométrique. La figure 2 est dessinée dans le cas d'un moteur à deux pôles ; on y a indiqué les sens positifs.

Soient e la longueur de l'entrefer et l la longueur du fer dans le sens axial. Considérons le parcours AA_1

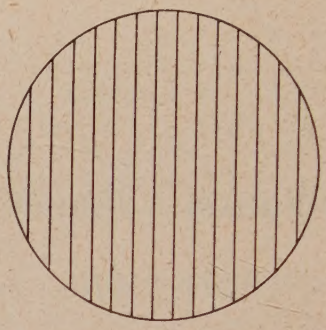

Fig. 3. — Approximation d'un enroulement à répartition sinusoïdale.

A_2, A_3, et écrivons que la circulation du champ le long de ce parcours est égal à la somme des ampères-tours qui le traverse

$$\int \vec{H}\, \vec{dl} = he - (h + dh)e = ni d\theta$$

ou $$db = \mu_0 dh = -\frac{\mu_0 ni}{e} d\theta = -pb_m \sin p\theta d\theta$$

puisque, par définition

$$b = b_m \cos p\theta,$$

d'où $$n = \frac{epb_m}{i\mu_0} \sin p\theta = n_m \sin p\theta.$$

Nous constatons que la forme de répartition est la même pour l'enroulement et le champ, avec un décalage de 90 degrés électriques dans l'espace.

Le nombre total de *spires par pôle* sera

$$N = \int_0^{\frac{\pi}{2p}} n_m \sin p\theta d\theta = \frac{n_m}{p} = \frac{eb_m}{i\mu_0}.$$

Évidemment, un tel enroulement est pratiquement irréalisable puisque la répartition des conducteurs est obligatoirement discrète, et non continue comme nous venons de le supposer ; mais nous définirons plus loin l'équivalence d'un enroulement réel et d'un ensemble d'enroulements répartis. Une première approximation d'enroulement sinusoïdalement réparti avait été essayée par P. Boucherot, qui avait employé le schéma de la figure 3, lequel représente un enroulement tel que la distance des plans de deux spires consécutives soit constante.

B. **Flux coupé.** — Considérons un enroulement à répartition sinusoïdale $n_1 = n_{1m} \sin p\theta$ et supposons qu'il existe dans l'entrefer un champ

$$b_2 = b_{2m} \cos p(\theta - \alpha)$$
$$= b_{2m} \cos p\theta \cos p\alpha + b_{2m} \sin p\alpha \sin p\theta.$$

Nous évaluerons le flux coupé par l'enroulement en

séparant les flux dus aux deux inductions b'_2 et b''_2 ; $b'_2 = b_{2m} \cos p\theta \cos p\alpha$, $b''_2 = b_{2m} \sin p\theta \sin p\alpha$.

D'après une propriété fondamentale des enroulements à courant alternatif, il est possible de relier les conducteurs actifs d'une façon quelconque, pourvu que les forces électromotrices s'ajoutent lorsque l'on parcourt l'enroulement d'une borne à l'autre. Nous pourrons donc supposer que l'enroulement est formé de spires telles que AB ayant leurs axes disposés suivant l'axe des pôles (fig. 2).

La partie de bobinage AB, qui comporte $n\mathrm{d}\theta$ spires, est traversée par un flux

$$\mathrm{d}\varphi'_2 = n_1 \mathrm{d}\theta \int_A^B rlb_{2m} \cos p\alpha \cos p\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2rlb_{2m} \cos p\alpha}{p} n_{1m} \sin^2 p\theta \mathrm{d}\theta$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2p},$$

r étant le rayon de l'alésage.

L'ensemble des conducteurs d'un pôle reliés en série, coupera un flux

$$\varphi'_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \mathrm{d}\varphi'_2 = \frac{2rlb_{2m} \cos p\alpha n_{1m}}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \sin^2 p\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi rlb_{2m} n_{1m} \cos p\alpha}{2p^2}.$$

La même partie AB est également traversée par un flux

$$\mathrm{d}\varphi''_2 = n_1 \mathrm{d}\theta \int_A^B rlb_{2m} \sin p\alpha \sin p\theta \mathrm{d}\theta = 0.$$

Le flux total se réduit donc à φ'_2 que nous allons mettre sous une autre forme, pour faire apparaître le nombre total de spires par pôle, soit $N_1 = n_{1m}/p$, et le flux maximum Φ_2 du champ b_{2m} à travers une surface couvrant un pas polaire

$$\Phi_2 = \frac{2\pi rl}{2p} \frac{2}{\pi} b_{2m} = \frac{2rlb_{2m}}{p},$$

$$\varphi_2 = \varphi'_2 = \frac{\pi N_1 \Phi_2 \cos p\alpha}{4}.$$

C. **Réactance d'entrefer d'un enroulement à répartition sinusoïdale.** — Si un enroulement à répartition sinusoïdale est parcouru par un courant i, l'induction qu'il produit dans l'entrefer aura pour valeur maximale

$$b_m = \frac{n_m i \mu_0}{ep}.$$

En remplaçant, dans le paragraphe précédent n_{1m}, b_{2m}, $p\alpha$ par n_m, b_m et $\pi/2$, on obtient le flux

$$\varphi = \frac{\pi rln_m}{2p^2} \frac{n_m i \mu_0}{ep} = \frac{2\pi rl}{2p} \frac{n^2_m}{p^2} \frac{i\mu_0}{2e} = \frac{N^2 i}{2\mathcal{R}},$$

d'où la réactance propre de l'enroulement par pôle

$$X = L\omega = \frac{\omega N^2}{2\mathcal{R}} = \frac{X'}{2},$$

X' étant la réactance calculée pour un entrefer ayant la surface d'un pôle, la longueur d'un entrefer simple de la machine, et le nombre de spires par pôle de l'enroulement.

D. **Mutuelle inductance de deux enroulements à répartition sinusoïdale.** — Soient deux enroulements définis par

$$n_1 = n_{1m} \sin p\theta \quad \text{et} \quad n_2 = n_{2m} \sin p(\theta - \alpha)$$

et qui, parcourus par un courant i, produiront dans l'entrefer des inductions

$$b_1 = b_{1m} \cos p\theta \qquad \text{et} \qquad b_2 = b_{2m} \cos p(\theta - \alpha).$$

En utilisant les résultats des paragraphes II. A. et II. B., nous trouvons le flux φ_{12} de l'induction b_2 à travers le premier enroulement

$$\varphi_{12} = \frac{N_1 N_2}{2} \frac{\cos p\alpha}{\mathcal{R}} i,$$

d'où la mutuelle inductance

$$M = \frac{N_1 N_2}{2} \frac{\cos p\alpha}{\mathcal{R}}.$$

En faisant $N_1 = N_2$ et $p\alpha = 0$, on retrouve bien l'expression de la réactance propre calculée ci-dessus.

III. **La théorie du champ transversal pour les moteurs à rotor bobiné.** — A. **Les équations de courant.** — Considérons le moteur de la figure 4, comprenant trois enroulements sinusoïdalement ré-

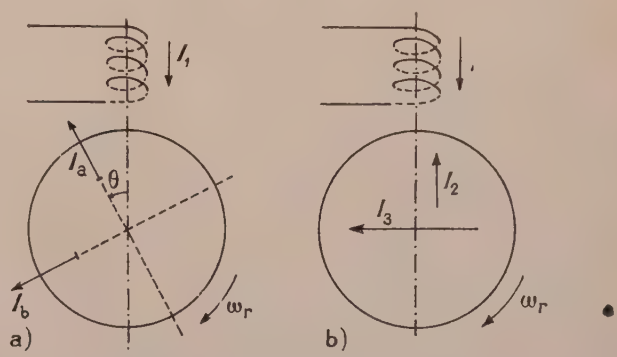

Fig. 4. — Schémas d'un moteur à trois enroulements à répartition sinusoïdale, l'un sur le stator, les deux autres sur le rotor.

partis, l'un sur le stator et les deux autres disposés sur le rotor, de manière à être décalés de 90 degrés électriques. La mutuelle inductance entre les deux enroulements rotoriques est nulle, et la mutuelle inductance entre un enroulement rotorique et le primaire est, d'après le paragraphe II. D., une fonction sinusoïdale de la position angulaire du rotor.

Soient :

I_a et I_b les courants dans les deux phases du rotor, θ l'angle des axes de l'enroulement primaire et de la phase a,

$M \cos\theta$ le coefficient de mutuelle inductance entre le primaire et la phase a,
R_1 et l_1 la résistance et l'inductance de fuites du primaire,
R_2 et l_2 celles d'une phase du rotor,
U la tension aux bornes du primaire,

$$-\theta' = -\frac{d\theta}{dt} = \omega_r = v\omega = (1-g)\omega$$

la vitesse angulaire du rotor (en désignant par v le rapport $\frac{\omega_r}{\omega}$).

Les équations de fonctionnement sont donc

$$U = R_1 I_1 + \frac{d}{dt}(l_1 I_1 - M\cos\theta I_a + M\sin\theta I_b + M I_1),$$

$$0 = R_2 I_a + \frac{d}{dt}(l_2 I_a + M I_a - M I_1 \cos\theta),$$

$$0 = R_2 I_b + \frac{d}{dt}(l_2 I_b + M I_b + M I_1 \sin\theta);$$

θ étant fonction du temps, les deux dernières équations s'écrivent

$$0 = R_2 I_a + l_2\frac{dI_a}{dt} + M\frac{dI_a}{dt} - M\cos\theta\frac{dI_1}{dt} + M I_1 \sin\theta\cdot\theta',$$

$$0 = R_2 I_b + l_2\frac{dI_b}{dt} + M\frac{dI_b}{dt} + M\sin\theta\frac{dI_1}{dt} + M I_1\cos\theta\cdot\theta'$$

ou encore, par combinaison linéaire

$$0 = R_2(I_a\cos\theta - I_b\sin\theta) + (M + l_2)\left(\frac{dI_a}{dt}\cos\theta - \frac{dI_b}{dt}\sin\theta\right) - M\frac{dI_1}{dt}$$

$$0 = R_2(I_a\sin\theta + I_b\cos\theta) + (M + l_2)\left(\frac{dI_a}{dt}\sin\theta + \frac{dI_b}{dt}\cos\theta\right) + M I_1\theta'.$$

Nous voyons donc apparaître les forces magnétomotrices suivant les axes direct et transverse

$$I_2 = I_a\cos\theta - I_b\sin\theta,$$
$$I_3 = I_a\sin\theta + I_b\cos\theta$$

dont les dérivées sont

$$\frac{dI_2}{dt} = -I_3\theta' + \frac{dI_a}{dt}\cos\theta - \frac{dI_b}{dt}\sin\theta,$$

$$\frac{dI_3}{dt} = -I_2\theta' + \frac{dI_a}{dt}\sin\theta + \frac{dI_b}{dt}\cos\theta.$$

L'introduction de I_2 et de I_3 donne aux équations la forme

$$U = R_1 I_1 + l_1\frac{dI_1}{dt} + M\frac{d}{dt}(I_1 - I_2).$$

$$0 = R_2 I_2 + (M + l_2)\left(\frac{dI_2}{dt} + \theta' I_3\right) - M\frac{dI_1}{dt},$$

$$0 = R_2 I_3 + (M + l_2)\left(\frac{dI_3}{dt} - \theta' I_2\right) - M I_1\theta'.$$

En régime établi, θ' est une constante, et, U étant sinusoïdal de pulsation ω, on voit que I_1, I_2 et I_3 le sont également. Si nous posons

$$M\omega = X_m, \qquad M\theta' = M\omega\theta'/\omega = -vX_m,$$
$$l_1\omega = x_1, \qquad l_2\theta' = -vx_2$$
$$l_2\omega = x_2,$$

nous obtenons les équations sous leur forme classique

$$U = (R_1 + jx_1)I_1 + jX_m(I_1 - I_2),$$
$$0 = (R_2 + jx_2)I_2 - jX_m(I_1 - I_2) + v(X_m + x_2)I_2,$$
$$0 = (R_2 + jx_2)I_3 + jX_m I_3 + vx_2 I_2 - vX_m(I_1 - I_2).$$

L'application du théorème de Ferraris permet d'étendre ce raisonnement à un nombre quelconque de phases du rotor.

Représentons maintenant les flux suivant les axes direct et transverse par les tensions qu'ils engendreraient dans le primaire, d'une part, et dans un enroulement identique au primaire et décalé de 90° dans l'espace par rapport à celui-ci. Nous poserons

$$jM\omega(I_1 - I_2) = U'_1, \qquad M\omega(I_1 - I_2) = -jU'_1,$$
$$jM\omega I_3 = -U''_1, \qquad M\omega I_3 = jU''_1.$$

Les équations prennent alors la forme

$$U = (r_1 + jx_1)I_1 + U'_1,$$
$$0 = (r_2 + jx_2)I_2 - U'_1 - jvU''_1 + vx_2 I_3,$$
$$0 = (r_2 + jx_2)I_3 - U''_1 + jvU'_1 - vx_2 I_2.$$

B. **Les couples.** — Considérons un champ d'induction $b_2 = b_{2m}\sin p\theta$ et un enroulement sinusoïdalement réparti $n = n_m \sin p\theta$. L'enroulement étant parcouru par un courant i, le couple qu'exerce le champ sur les conducteurs placés entre les abscisses angulaires θ et $\theta + d\theta$ est égal à $d\Gamma = -b_{2m}n_m i l r \sin^2 p\theta d\theta$ c'est-à-dire que l'on a, par pôle, un couple égal à

$$\Gamma = -\int_0^{\frac{\pi}{2p}} + rlb_{2m}n_m i\sin^2 p\theta d\theta = \frac{-\pi rlb_{2m}n_m}{2p^2}\frac{pi}{2}.$$
$$= -\frac{\varphi i}{2} \qquad \text{(en valeur instantanée)}$$

φ étant le flux de b_2 à travers un enroulement identique à l'enroulement n, mais décalé sur celui-ci de 90°. On tire

$$\frac{\Gamma\omega}{p} = \frac{jui}{2} \qquad \text{avec} \qquad u = j\omega\varphi.$$

Autrement dit, si l'on exprime le couple sous forme de puissance synchrone, c'est-à-dire si on l'exprime par la puissance qu'il développerait à la vitesse de synchronisme ($C = P\omega^{-1}$), on voit que :

$\Gamma_{moyen} = I \wedge U$ où I et U sont les vecteurs du diagramme de Fresnel où les grandeurs sont représentées en valeurs efficaces.

Il en résulte que pour le moteur que nous considérons, le couple, exprimé comme il vient d'être indiqué, est donné directement par

$$I_2 \wedge U''_1 - I_3 \wedge U'_1.$$

IV. **Introduction à l'étude des moteurs à cage d'écureuil.** — On pourrait assimiler une cage d'écureuil à un enroulement ordinaire possédant une seule

barre par enroulement, et étendre le raisonnement précédent.

Nous n'avons pas retenu cette méthode, parce qu'elle ne permet pas une étude plus rapide des dispersions que la méthode directe exposée ci-après.

Considérons un cadre formé par deux barres consécutives et les portions d'anneaux qui les réunissent. Si l'on cherche directement la force électromotrice induite dans ce cadre par rotation dans un champ alternatif à répartition sinusoïdale, on trouve qu'elle est de la forme

$$e = e_m \cos p(\theta - \theta_e) \cos(\omega t - \varphi_e)$$

θ étant l'abscisse angulaire du barreau, avec $\theta = \frac{v\omega t}{p}$,

φ_e et θ_e étant deux constantes.

On doit donc se demander si les courants seront de la même forme, ce qui conduit à étudier les relations entre les tensions et les courants dans un système de structure polyphasée parcouru par un système de courants de la forme

$$i_k = i_m \cos\left(a - 2\pi p \frac{k-1}{q}\right),$$

i_m et a étant des fonctions quelconques du temps.

Remarquons que, si nous revenons au paragraphe précédent, nous voyons que les forces électromotrices induites dans les enroulements du stator sont de la forme

$$e_0 = \frac{d}{dt}(MI_1 \cos\theta) = \frac{d}{dt}(MI_m \cos\omega t \cos\theta)$$

et que les courants qui en résultent sont effectivement de la même forme, puisque nous avons trouvé

$$I_a = I_2 \cos\theta + I_3 \sin\theta,$$
$$I_b = -I_2 \sin\theta + I_3 \cos\theta$$

où I_2 et I_3 sont seulement des fonctions sinusoïdales du temps.

B. **Forces électromotrices induites dans les cadres de la cage.** — Soit un entrefer où le primaire produit un champ d'excitation

$$b = b_m \cos p\theta \quad \text{avec } b_m = B_m \cos\omega t.$$

Nous supposerons que les barreaux sont inclinés d'un angle géométrique γ sur les génératrices du rotor, et nous nous reporterons à la figure 5, où est indiqué le sens positif des forces électromotrices et des courants dans un cadre numéroté k.

Soient :

M le centre du cadre,
θ l'abscisse angulaire de M au temps t,
z le flux traversant le cadre,
l la longueur du fer,
$\frac{lx}{2}$ la distance d'un point N à un plan normal à l'axe et passant par le milieu du fer ; x est donc un paramètre qui peut varier de -1 à $+1$,
r le rayon moyen de l'entrefer,
q le nombre total de barres de la cage. On aura

$$\varphi = \int_{-1}^{+1} \int_{\theta-\frac{\pi}{q}}^{\theta+\frac{\pi}{q}} r\,d\theta \frac{l\,dx}{2} b_m \cos p\left(\theta + \frac{\gamma x}{2}\right)$$
$$= \frac{rlb_m}{2} \frac{\sin p\gamma/2}{p\gamma/2} \frac{\sin p\pi/q}{p\pi/q} \cos p\theta.$$

Nous poserons

$$C_\gamma = \frac{\sin p\gamma/2}{p\gamma/2} \quad \text{et} \quad C_q = \frac{\sin p\pi/2}{p\pi/2},$$

d'où $\varphi = \frac{rlb_m}{2} C_\gamma C_q \cos p\theta$.

Si l'on veut mettre en évidence la mutuelle inductance entre le primaire et un cadre, on exprimera b_m en fonction du courant $I_1 = i_m \cos\omega t$ qui circule dans le primaire ; on trouvera alors

$$M = \frac{rlN\mu_0}{e} C_\gamma C_q \cos p\theta$$

et la force électromotrice induite par rotation dans le champ du primaire, à la vitesse angulaire constante

$$-\frac{\omega_r}{p} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{-v\omega}{p}$$

$$e = -\frac{dMi_1}{dt}$$
$$= \frac{i\omega rlN\mu_0}{e} C_\gamma C_q [v \sin p\theta \cos\omega t + \cos p\theta \sin\omega t]$$

ce qui met en évidence un terme statique ou de transformation et un terme dynamique.

Considérons maintenant un ensemble de q cadres numérotés de 1 à q, régulièrement disposés sur le rotor, tournant dans le sens des θ décroissants à la vitesse angulaire ω_r, la position des centres des cadres étant définie par

$$a_1 = a_0 - \frac{\omega_r t}{p},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_k = a_0 + 2\pi\frac{k-1}{q} - \frac{\omega_r t}{p},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_q = a_0 + 2\pi\frac{q-1}{q} - \frac{\omega_r t}{p}.$$

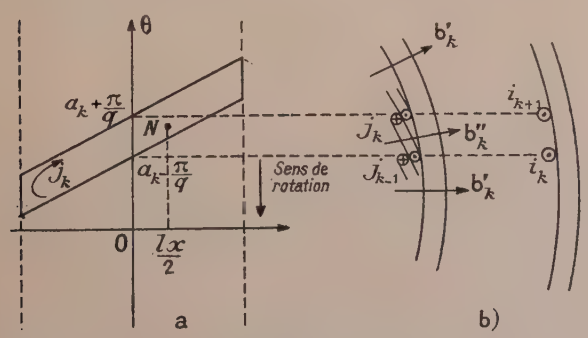

Fig. 5. — Schémas relatifs aux forces électromotrices induites dans les cadres de la cage.

Nous nous trouvons en présence d'un système de q forces électromotrices, appliquées à un système de cadres de structure polyphasée, et de la forme

$e_k = ve_m \cos pa_k \cos \omega t + e_m \sin pa_k \sin \omega t.$

Si l'on introduit alors les formules trigonométriques de transformation d'un produit de cosinus en une somme, on met en évidence des forces électromotrices de pulsation $\omega \pm \omega_r$ et on retrouve la théorie de la décomposition en deux champs tournant (théorème de Maurice Leblanc).

C. Résumé de l'étude des systèmes polyphasés équilibrés. — Nous allons rapidement rappeler les propriétés classiques des réseaux polyphasés [1] et nous montrerons que ces propriétés peuvent être étendues à d'autres systèmes de courants et de tensions.

Considérons (fig. 6) q circuits bifilaires identiques, linéaires, orientés de la borne a vers la borne b, et supposons-les parcourus par un système de courants polyphasés équilibrés

$$i = i_m \cos\left(\omega t - 2\pi\, p \frac{k-1}{q}\right).$$

a) On peut représenter les courants par un ensemble de vecteurs disposés en étoile ou en polygone, la figure choisie étant supposée tourner autour de son centre avec une vitesse angulaire uniforme ω.

b) Si la mutuelle inductance de deux circuits est la même quels que soient ces deux circuits (c'est-à-dire si les circuits sont symétriquement disposés), on peut définir une impédance cyclique, du fait que

$$i_k = -\sum_{k' \neq k} i_{k'}.$$

Ceci découle donc de la propriété (a).

c) Si l'on considère des paires de points homologues $c_1 d_1$ ----$c_k d_k$ ----$c_q d_q$, les tensions u_1---u_k ---u_q entre ces points formeront également un système polyphasé équilibré. Donc, à un système de courants polyphasés équilibrés correspondent des systèmes de tensions et de forces électromotrices polyphasées équilibrées, et réciproquement. Ces tensions et forces électromotrices sont représentables par une étoile ou un polygone, comme les courants.

d) Si l'on réunit b_1 et a_2, b_2 et a_3 ----b_{q-1} et a_q, on ne modifie pas l'indépendance des circuits. De plus, a_1 et b_q sont au même potentiel, et on peut les réunir : c'est le groupement en polygone ; de même, on peut réunir les circuits en étoile. Les points neutres, réels ou fictifs, sont au même potentiel.

e) La représentation des courants et des tensions par une figure polygonale permet de définir l'équivalence d'une étoile d'impédances Z_e et d'un polygone d'impédances Z_p lorsqu'on a la relation

$$4 \sin^2 \frac{\pi}{q} Z_e = Z_p.$$

f) La puissance fluctuante est nulle.

D. Étude d'un système particulier de courants. — Considérons les mêmes circuits bifilaires linéaires, identiques aux précédents, mais supposons qu'ils soient parcourus par des courants de la forme

$$i_k = i_m \cos\left(a - 2\pi p \frac{k-1}{q}\right) = i_m \cos a_k.$$

p étant un nombre entier non multiple pair de q, i_m et a étant des fonctions quelconques du temps (en faisant $i_m = \text{Cte}$ et $a = \omega_r t$, on retrouve un système polyphasé équilibré).

a) A chaque instant, les courants i_k peuvent être représentés par les projections, sur un même axe, de q vecteurs que l'on peut grouper suivant une étoile ou suivant un polygone. Chaque point de la figure décrit une trajectoire qui est d'autant plus complexe que i_m et a sont des fonctions plus compliquées du

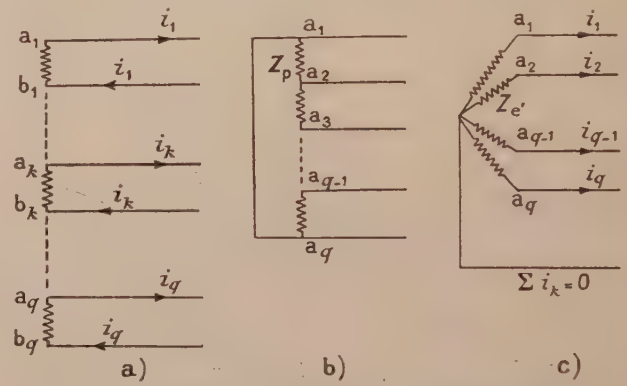

Fig. 6. — Schémas de systèmes de courants polyphasés.

temps ; chaque trajectoire se déduit des autres par rotation autour du centre de la figure. Par exemple, si l'on groupe les vecteurs en étoile, l'extrémité du vecteur i_1 écrit une courbe qui peut être représentée paramétriquement en coordonnées polaires par $\varphi = i_m(t)$ et $\theta = a(t)$; l'extrémité du vecteur i_k décrit une trajectoire déduite de la précédente par une rotation de $-2\pi p \dfrac{k-1}{q}$ autour de l'origine.

b) Montrons que les tensions et les forces électromotrices forment des systèmes représentés d'une manière analogue. Tout d'abord, ceci est évident pour les chutes de tensions dans les résistances $u'_k = ri_k$.

Différentions i_k

$di_k = di_m \cos a_k - i_m \sin a_k da$ ($da_k = da$) ; di_k comprend donc deux termes infiniment petits, appartenant à deux systèmes représentables par des étoiles ou des polygones. Donc le système des dérivées, di_k/dt est représentable par une étoile, et il en est de même pour les chutes de tensions inductives. Intégrons i_k, on a

$$q_k = \int_0^t i_k \cos a_k dt ;$$

l'élément différentiel possède la propriété étudiée ;

cette propriété étant additive appartient aussi à q_k, et par conséquent aux chutes de tensions capacitives.

Toutes les tensions et les forces électromotrices sont donc de la forme

$$e_k = e_m \cos\left(b - 2\pi p \frac{k-1}{q}\right).$$

Les relations entre i_m, a, e_m et b sont d'autant plus compliquées que i_m et a le sont eux-mêmes.

c) Il résulte des deux propriétés précédentes que la plupart des démonstrations relatives aux systèmes polyphasés équilibrés s'appliquent aux systèmes de structure polyphasée parcourus par des courants de la forme $i_m \cos pa_k$ et, en particulier, on voit :

1° que l'on peut définir une inductance propre cyclique si les circuits sont symétriques puisque

$$\sum_{k' \neq k} i_{k'} = -i_k ;$$

2° que l'on peut grouper les circuits en étoile ou, en polygone, et que les points neutres, réels ou fictifs, sont au même potentiel ;

3° qu'un ensemble d'impédances Z_p groupées en polygone est équivalent à un ensemble d'impédances Z_e groupées en étoile, si

$$Z_p = 4 \sin^2 \frac{p\pi}{q} Z_e.$$

d) La puissance totale dans le réseau sera la somme des puissances dans chaque circuit élémentaire

$$P = \sum_k e_k i_k$$

$$= \sum_k e_m i_m \left[\cos (a - b) + \cos \left(a + b - 4\pi \frac{b-1}{q} p\right)\right]$$

$= q e_m i_m \cos (a - b)$, puisque $\frac{4\pi p}{q}$ n'est pas un multiple de 2π.

En particulier, on retrouve le cas des systèmes polyphasés équilibrés $P = q e_m i_m \cos \varphi$, où la puissance fluctuante est nulle.

V. Les inductances propres d'une cage d'écureuil. — **A. Etude d'une certaine fonction.** — Soit (fig. 7), la fonction $F(x)$, de période 2π, définie par

$$F(x) = \frac{q-1}{q} y_k \text{ pour } -\frac{\pi}{q} < x < \frac{\pi}{q}.$$

$$F(x) = -\frac{y_k}{q} \text{ pour } -\pi < x < -\frac{\pi}{q} \text{ et } \frac{\pi}{q} < x < \pi.$$

Décomposons cette fonction en série de Fourier. La valeur moyenne est nulle, et la fonction est paire, d'où

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx$$

avec $$C_n = \frac{2y_k}{q} \cdot \frac{\sin n\pi/q}{n\pi/q}.$$

B. Champ créé par un système de courants parcourant les barreaux d'une cage d'écureuil. — Comme les forces électromotrices induites par le primaire dans les cadres d'une cage d'écureuil sont de la

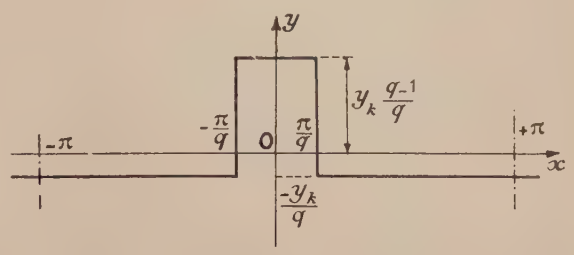

Fig. 7. — Fonction $F(x)$ de période 2π.

forme étudiée au paragraphe IV. C., nous sommes tout naturellement amenés à étudier le champ créé par une cage d'écureuil parcourue par des courants de la même forme.

Appelons $a'_k = a_k - \pi/q = a'_1 + 2\pi \frac{k-1}{q}$ l'abscisse angulaire du milieu du barreau commun aux $k^{\text{ième}}$ et $(k-1)^{\text{ième}}$ cadres. Le courant dans ces cadres (c'est-à-dire ramené à un schéma polygonal) seront j_k et j_{k-1}. $i_k = j_k - j_{k-1}$ et les modules de j_k et de i_k seront liés par la relation

$$j_k = \frac{i_k}{2 \sin \frac{\pi p}{q}} \cos\left(a - \pi p \frac{2k-1}{q} - \frac{\pi}{2}\right). \quad \text{(voir fig. 9)}$$

Nous étudierons la répartition du champ d'induction dans l'entrefer, dans un plan P normal à l'axe de la machine, et situé au milieu de la longueur du fer ; en employant les notations du paragraphe IV. A., le plan P correspond à $x = 0$; le champ dans un plan P'

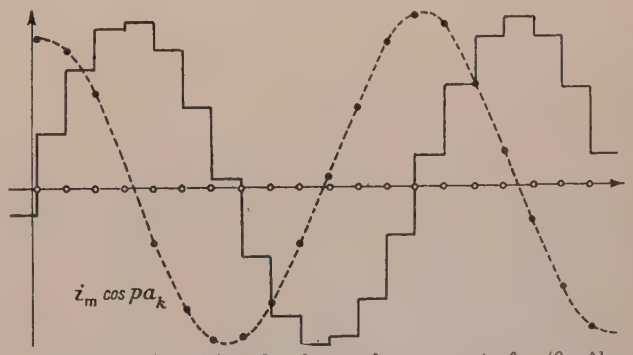

Fig. 8. — Répartition du champ dans un entrefer (6 pôles, 40 barreaux). (La figure est limitée à 20 barreaux.)

situé à une certaine abscisse x se déduit de celui dans le plan P par une translation suivie d'une rotation.

En appliquant le théorème d'Ampère et en écrivant l'équation de conservation du flux, on peut montrer que le champ d'induction varie comme il est indiqué en figure 8.

Cependant, nous préférerons faire le calcul en étu-

diant le champ créé par un seul cadre, et superposer les champs des différents cadres.

Le courant dans la barre commune au $(k-1)^{\text{ième}}$ et au $k^{\text{ème}}$ cadre est

$$i_k = j_k - j_{k-1} = i_m \cos\left(a - 2\pi p \frac{k-1}{q}\right).$$

Appelons b''_k et b'_k les champs d'induction créés par la circulation du courant j_k dans le $k^{\text{ième}}$ cadre,

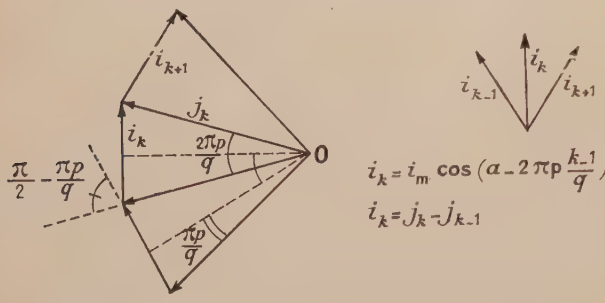

Fig. 9. — Diagramme polygonal des courants $i_m \cos a_k$ (paragraphes G. et IV. D,).

respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de ce cadre (fig. 10). La conservation du flux exige que

$$b'_k\left(2\pi - \frac{2\pi}{q}\right) + \frac{2\pi}{q} b''_k = 0$$

c'est-à-dire que $b''_k = -(q-1)b'_k$.

Appliquons ensuite le théorème d'Ampère à un trajet fermé entourant un des deux côtés de la bobine, et comprenant, pour les traversées de l'entrefer, une ligne de

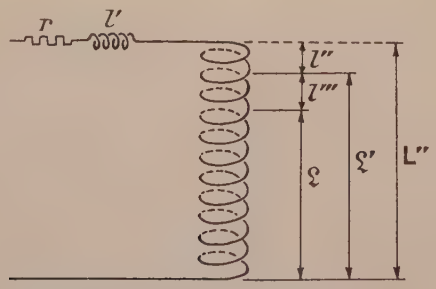

Fig. 10. — Schéma équivalent relatif aux inductances d'une cage d'écureuil. L'inductance d'encoche étant l', on a

$$L' = \mu_0 \frac{\pi r l}{2qe \sin \frac{2\pi p}{q}} = \frac{\mathfrak{L}'}{C_q^2},$$

$$\mathfrak{L}' = C_q^2 L'' = \mathfrak{L}''\left(\frac{\sin \frac{p\pi}{q}}{p \frac{\pi}{q}}\right)^2 = \frac{\mu_0 r l q}{2p^2 e \pi},$$

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'\left(\frac{\sin p \frac{\gamma}{2}}{p \frac{\gamma}{2}}\right) = C_\gamma \mathfrak{L}',$$

$$l'' = \frac{1 - C_q^2}{C_q^2} \mathfrak{L}'. \qquad l''' = (1 - C_\gamma)\mathfrak{L}.$$

force de b'_k et une ligne de force de b''_k; nous obtenons

$$e(-b''_k + b'_k) = \mu_0 j_k, \qquad \frac{\mu_0 j_k}{e} = b'_k q$$

d'où

$$b'_k = \frac{\mu_0 j_k}{eq} \quad \text{et} \quad b''_k = -\frac{q-1}{q}\frac{j_k \mu_0}{e}.$$

Le champ d'un seul cadre présente donc l'allure de la fonction $F(x)$ que nous avons étudiée précédemment, avec

$$y_k = -\frac{\mu_0 j_k}{e} \quad \text{et} \quad x = \theta - a'_k - \frac{\pi}{q}.$$

Le $n^{\text{ième}}$ harmonique, dû au seul courant j_k, aura pour expression

$$(b_n)_k = \frac{-2 j_k}{e} \mu_0 \frac{\sin n\pi/q}{n\pi} \cos n\left(\theta - a'_k - \frac{\pi}{q}\right)$$

ou, en introduisant i_k à la place de j_k

$$(b_n)_k = \frac{-2}{e} \frac{\mu_0 i_m}{2 \sin \frac{\pi p}{q}} \frac{\sin n\pi/q}{n\pi} \cos\left(a - \pi p \frac{2k-1}{q} - \frac{\pi}{2}\right) \times \cos n\left(\theta - a'_k - \frac{\pi}{q}\right).$$

Remplaçant a'_k par $a'_1 + 2\pi \frac{k-1}{q}$, et transformant le produit de cosinus en une somme, on obtient

$$(b_n)_k = -\frac{\mu_0 i_m \sin n\pi/q}{2ep\pi \sin \frac{\pi p}{q}} \left[\cos\left(n\theta - 2k\pi \frac{p+n}{q} + a - na'_1 - \frac{\pi}{2} + \pi \frac{p+n}{q}\right) + \cos\left(n\theta + 2\pi k \frac{p-kn}{q} - a - na'_1 + \frac{\pi}{2} - \pi \frac{p-n}{q}\right)\right].$$

En sommant cette expression par rapport à k, on obtiendra b_n, c'est-à-dire le $n^{\text{ième}}$ harmonique du champ le long de l'entrefer ; le $p^{\text{ième}}$ harmonique correspondra au champ principal. Nous remarquons que nous avons à sommer deux séries de cosinus de la forme

$$\cos\left(A\theta + B + 2\pi k \frac{p-n}{q}\right)$$

et

$$\cos\left(C\theta + D - 2\pi k \frac{p+n}{q}\right).$$

La somme ne sera différente de zéro que si

$$p \pm n = \lambda q,$$

λ étant un entier positif, négatif ou nul.

Le champ principal ($n = p$, $\lambda = 0$) est égal à

$$b_p = \frac{\mu_0 q i_m}{2ep\pi} \cos\left(p\theta - \frac{a}{p} - a'_1 + \frac{\pi}{2p}\right).$$

Application au moteur à induction polyphasé. — Pour un observateur lié au champ du stator, le rotor tourne dans un champ fixe avec la vitesse $-g\omega/p$, et les barres sont parcourues par des courants de pulsation g. On a donc

$$a'_1 = g\omega t + a'_0, \quad i_m = \text{Cte}, \qquad a = g\omega t - \varphi,$$

d'où $b = \frac{qi_m\mu_0}{2p\pi e}\cos p\left(\theta + \frac{\varphi}{p} - a'_0 + \frac{\pi}{2p}\right)$:

le champ de réaction du rotor tourne à la vitesse de synchronisme, puisqu'il est immobile par rapport aux axes que nous avons choisis.

Cette manière de considérer le problème a permis à Dreese [3] de montrer comment un choix défectueux du nombre de barres pouvait amener un « trou de couple » au septième du synchronisme, dans le cas des moteurs polyphasés.

C. **Inductance propre cyclique d'une cage d'écureuil.** — Considérons les q cadres élémentaires que nous avons utilisés précédemment et calculons les flux qui les traversent lorsqu'ils sont parcourus par des courants j_k. La surface d'un cadre étant $2\pi rl/q$, et le champ

$$b''_k = -\mu_0 j_k \frac{q-1}{qe},$$

le flux de b''_k sera

$$-j_k \frac{q-1}{qe} \times \frac{2\pi rl}{q}.$$

Il faut aussi compter le flux de tous les champs dus aux courants traversant les autres cadres ; ce flux est égal à

$$\frac{2\pi rl}{q} \sum_{k' \neq k} \frac{j_{k'}}{qe}$$

comme $\sum_k j_k = 0, \qquad \sum_{k' \neq k} j_{k'} = -j_k,$

le flux total cherché est égal à

$$\frac{2\pi rl}{q}\left[-\frac{q-1}{q}\frac{j_k}{e} - \frac{j_k}{qe}\right] = -\frac{2\pi rl\mu_0}{qe} j_k.$$

Le signe — provient du fait que les sens positifs choisis pour les champs et les courants ne sont pas cohérents. L'inductance propre cherchée est donc

$$L' = \frac{\mu_0 2\pi rl}{qe}.$$

Comme L' correspond au schéma polygonal, nous allons la ramener au schéma étoilé, en utilisant les résultats du paragraphe IV

$$L'' = \frac{\mu_0 2\pi rl}{qe} \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi p}{q}}.$$

Enfin, la circulation des courants i_k ne provoque pas seulement l'apparition d'un champ dans l'entrefer, mais aussi dans les barres elles-mêmes. On doit donc ajouter à L'' une inductance propre l', d'où

$$L = \frac{\pi\mu_0 rl}{2eq\sin\frac{2\pi p}{q}} + l'.$$

Le calcul de l' (ou plutôt : son évaluation) est examiné en détail dans les ouvrages classiques d'électrotechnique.

D. **Influence du nombre de barres sur le couplage des cages d'écureuil.** — Lorsqu'une cage d'écureuil se trouve placée en face d'un enroulement à répartition sinusoïdale à p paires de pôles, seul le champ harmonique h_p créé par la cage peut induire une force électromotrice dans l'enroulement. Il convient donc de distinguer, dans L', deux parties : la partie qui correspond au champ principal h_p, et qui s'introduira, dans la suite du calcul, sous forme d'inductance mutuelle, et une autre partie qui se trouvera concidérée comme une inductance de fuites dues aux harmoniques de distribution.

Calculons le flux du champ h_p à travers le $k^{\text{ième}}$ cadre fictif : nous trouvons

$$\int_{a'_k}^{a'_k+\frac{2}{q}} rl\frac{qi_m\mu_0}{2p\pi e}\cos p\left(\theta - \frac{a}{p} - a'_1 + \frac{\pi}{2p}\right)d\theta$$
$$= -\mu_0\frac{rlqi_m}{2p^2\pi e}\left[\sin p\left(a'_k + \frac{2\pi}{q} - \frac{a}{p} - a'_1 + \frac{\pi}{2p}\right) - \sin p\left(a'_k - \frac{a}{p} - a'_1 + \frac{\pi}{2p}\right)\right].$$

Remplaçons a'_k par $a'_1 + 2\pi\frac{k-1}{q}$ et transformons la différence des sinus en produit, nous obtiendrons

$$\frac{rlqi_m}{p^2\pi e}\mu_0 \sin\frac{p\pi}{q}\cos\left(a - \pi p\frac{2k-1}{q} - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\mu_0\frac{2rlq}{p^2\pi e} j_k \sin^2\frac{p\pi}{q}.$$

Là, encore le signe — est dû au choix des sens positifs ; l'inductance propre cherchée, ramenée au schéma étoilé, est donc

$$\mathfrak{L}' = -\frac{2\pi rlq}{p^2\pi e}\sin^2\frac{p\pi}{q} \times \frac{1}{4\sin^2\frac{p\pi}{q}} = -\frac{\mu_0 rlq}{2p^2 e\pi}.$$

On peut écrire

$$\frac{\mathfrak{L}'}{l''} = \frac{\sin^2\frac{p\pi}{q}}{\left(\frac{p\pi}{q}\right)^2} = C^2_q.$$

C_q est un coefficient qui caractérise la forme du champ secondaire.

Si nous appelons l'' l'inductance de fuites due aux harmoniques, on a la relation

$$l'' = L'' - \mathfrak{L}' = L''(1 - C^2_q).$$

Rappelons que ces résultats correspondent à une répartition des courants de la forme

$$i_k = i_m \cos\left(a - 2\pi\frac{k-1}{q}\right),$$

quels que soient i_m et a, et ne sont valables que pour une telle répartition.

E. **Influence du « biaisage » sur le couplage des cages d'écureuil.** — Nous venons de diviser la réactance cyclique de la cage en deux parties : l'une correspondant au terme fondamental de distribution du

***

champ, l'autre à des fuites. Supposons maintenant que les barreaux soient inclinés d'un angle γ sur les génératrices de l'alésage. Toutes choses restant égales par ailleurs, la force électromotrice induite dans un enroulement statorique dépendra de l'angle γ. On peut recommencer le raisonnement qui a été établi à propos de la force électromotrice induite dans un cadre, ou bien remplacer l'induction b par sa valeur moyenne le long d'une génératrice : $b' = bC$, la différence $b - b'$ correspondant à un flux de fuites

D'où $$L = \mathfrak{L}' \frac{\sin p\gamma/2}{p\gamma/2}$$

et les fuites dues au « biaisage »

$$l''' = (1 - C_\gamma)\mathfrak{L}'.$$

F. **Résumé des impédances.** — Sur la figure 10 on a représenté toutes les inductances précédentes, ramenées à une barre de la cage d'écureuil (schéma en étoile de la cage).

Si R_b est la résistance d'une barre, R_a la résistance d'une portion d'anneau comprise entre deux barres, k_r un coefficient qui a été défini par Trickey [5] pour tenir compte de la répartition des lignes de courant dans l'anneau, on a la résistance r d'une phase du rotor

$$r = R_b + \frac{R_a k_r}{4 \sin^2 \frac{p\pi}{q}}.$$

VI. Les équations de fonctionnement du moteur monophasé à cage. — **A. Établissement des équations.** — Nous avons vu que si le courant dans l'enroulement primaire est égal à $i_m \cos(\omega t - \varphi_1)$, il crée dans l'entrefer une induction $b_1 = b_{1m} \cos p\theta$, avec la relation

$$b_{1m} = \frac{\mu_0 N i_m}{e} \cos(\omega t - \varphi_1),$$

La force électromotrice induite par le flux de b_1 à travers le $k^{ième}$ cadre aura pour valeur

$$e_k = \frac{\omega_r}{p} \frac{C_\gamma l r N i_1}{e} \cos pa_k \cos(\omega t - \varphi_1) + \frac{\omega}{p} \frac{C_\gamma l r N i_1}{e} \sin pa_k \sin(\omega t - \varphi_1).$$

Il est donc logique de rechercher le courant i_k sous la forme

$$i_k = i_3 \cos pa_k \cos(\omega t - \varphi_3) - i_2 \sin pa_k \sin(\omega t - \varphi_2).$$

La circulation d'un tel courant produit une induction dont le terme fondamental est

$$b_r = - b_{2m} \cos p\theta - b_{3m} \sin p\theta$$

$$= - \mu_0 \frac{q i_3}{2ep\pi} \sin p\theta \cos(\omega t - \varphi_3) - \mu_0 \frac{q i_2}{2ep\pi} \cos p\theta \sin(\omega t - \varphi_2).$$

La force électromotrice induite par le flux de $b = b_1 + b_r$ est la même que celle qui serait induite par le flux correspondant à l'induction

$$\left[\mu_0 \frac{N i_1}{e} \cos(\omega t - \varphi_1) - \mu_0 \frac{C_\gamma q i_2}{2ep\pi} \sin(\omega t - \varphi_2) \right] \cos p\theta$$

dont la valeur est

$$\mu_0 \frac{\pi r l N}{2p} \left[\frac{N i_1}{e} \cos(\omega t - \varphi_1) - \frac{C_\gamma q i_2}{2ep\pi} \sin(\omega t - \varphi_2) \right].$$

Soient :

U_1 la tension d'alimentation du primaire,

r_1 la résistance du primaire,

l_1 l'inductance propre des fuites du primaire dues aux têtes de bobines, aux harmoniques de distribution, et à la perméance des encoches.

L'équilibre des tensions s'écrit

$$e_k = r i_m + (x + l) \frac{d i_m}{dt};$$

$$U_1 = r_1 I_1 + l_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{\pi r l N}{2p} \frac{d}{dt} \left[\frac{N i_1}{e} - \frac{q i^2 \sin(\omega t - \varphi_2) \cdot C_\gamma}{2ep\pi} \right].$$

Le développement de la première de ces équations donne

$$r[i_3 \cos pa_k \cos(\omega t - \varphi_3) - i_2 \omega \sin pa_k \sin(\omega t - \varphi_2)] + (\mathfrak{L} - l)[- i_3 \omega \cos pa_k \sin(\omega t - \varphi_3) - i_2 \omega \sin pa_k \cos(\omega t - \varphi_2) + i_3 \omega_r \sin pa_k \cos(\omega t - \varphi_3) + i_2 \omega_r \cos pa_k \sin(\omega t - \varphi_2)] - \frac{\omega_r}{p} \frac{C_\gamma l_2 N i_1}{2e} \mu_0 \cos(\omega t - \varphi_1) \cos pa_k - \frac{\omega_r}{p} \frac{l r N i_1 C_\gamma}{2e} \mu_0 \sin(\omega t - \varphi_1) \sin pa_k = 0$$

$$\left[\omega_r = - p \frac{da_k}{dt} \right].$$

Si l'on annule séparément les coefficients de $\sin pa_k$ et $\cos pa_k$, on dédouble l'équation en faisant apparaître la décomposition du rotor en deux enroulements fictifs disposés l'un suivant l'axe direct, l'autre suivant l'axe transversal. On représentera

$i_2 \sin(\omega t - \varphi_2)$ par I'_2 ; $i_3 \cos(\omega t - \varphi_3)$ par I'_3 et $i_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$ par I_1 ;

il viendra alors

$$U_1 = (r_1 + j l\omega) I_1 + \frac{j\pi\omega r l N^2}{2pe} \mu_0 \left(I_1 - \frac{C_\gamma q}{2p\pi N} I'_2 \right),$$

$$0 = r I'_3 + j\omega(\mathfrak{L} + l) I'_3 + (\mathfrak{L} + l)\omega_r I'_2 - \frac{\omega_r C_\gamma r l N}{pe} \mu_0 I_1,$$

$$0 = r I'_2 + (\mathfrak{L} + l)\omega_r I'_3 + (\mathfrak{L} + l) j\omega I'_2 - j \frac{\omega C_\gamma l N r}{pe} \mu_0 I_1.$$

B. Courants et impédances équivalents. Influence du « biaisage » sur les fuites du primaire. Équations finales. — Nous sommes tout naturellement amenés, à cause de la troisième équation, à poser $I_2 = \frac{q}{2p\pi N} I'_2$ et, pour faire apparaître à la fois I_2 et l'inductance

propre du primaire $X = \dfrac{\omega \pi r l N^2}{2pe}$ nous multiplierons les deux premières équations par :

$$\frac{q}{p\pi N} \times \frac{N^2 p \pi^2}{q} = N\pi,$$

ce qui met en évidence l'impédance propre du secondaire ramenée au primaire

$$r_2 + \mathrm{j}x_2 = \frac{\pi^2 p N^2}{q}(r + \mathrm{j}l\omega)$$

et fait en même temps apparaître le courant dans l'axe transversal.

$$I_3 = \frac{qI'_3}{2p\pi N}.$$

On utilise la relation

$$\mathfrak{L}\ \frac{\pi^2 p N^2}{q} = C_1 \frac{rlq}{2p'e\pi} \cdot \frac{\pi^2 p N^2}{q} \mu_0 = \frac{C_1 \pi r l N^2}{2pe} = \frac{C_1 X}{\omega}$$

et on pose $X_m = C_1 X$. Dans la dernière équation, on

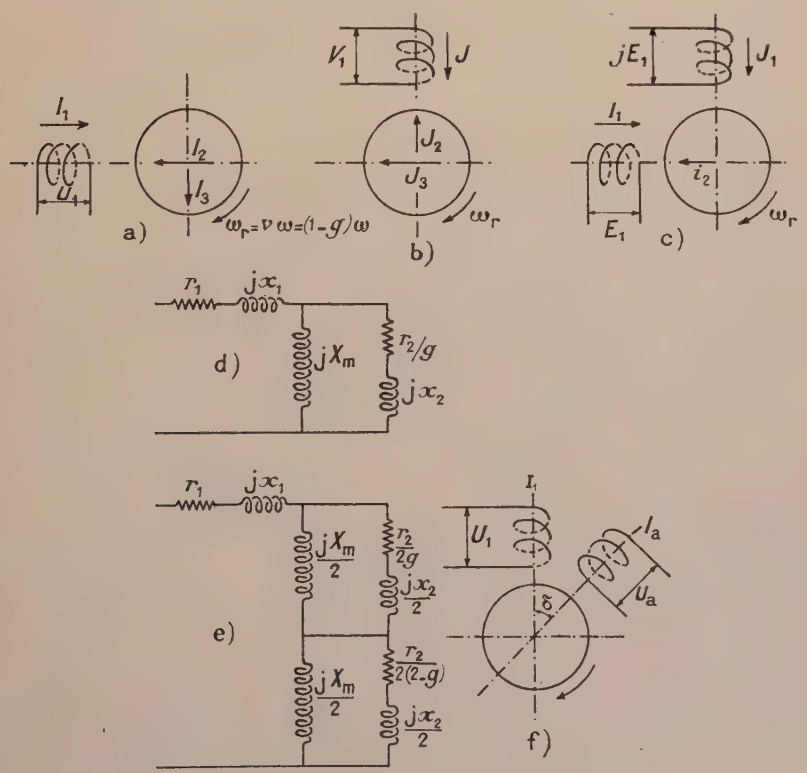

Fig. 11. — Schémas montrant la correspondance des théories du champ transversal et des champs tournants.

fera enfin apparaître les fuites du primaire, dues au biaisage, par la relation évidente

$$-I_1 = -C_1 I_1 - (1 - C_1) I_1,$$

$$U_1 = \left[R_1 + \mathrm{j}l_1\omega + \mathrm{j}\omega(1 - C_1)\frac{X}{\omega}\right] + \mathrm{j}C_1 X(I_1 - I_2),$$
$$0 = (r_2 + \mathrm{j}x_2)I_3 + v(X_m + x_2)I_2 - vX_m I_1 + \mathrm{j}X_m I_3,$$
$$0 = (r_2 + \mathrm{j}x_2)I_2 - (X_m + x_2)I_3 - \mathrm{j}X_m(I_1 - I_2)$$

$(1 - C_1)\dfrac{X}{\omega}$ est une inductance de fuites dues au biaisage ;

$\mathrm{j}x_1 = \mathrm{j}\omega\left[l_1 + (1 - C_1)\dfrac{X}{\omega}\right]$ est l'inductance totale de fuites du primaire, et on obtient le système définitif d'équations

$$U_1 = (r_1 + \mathrm{j}x_1)I_1 + \mathrm{j}X_m(I_1 - I_2),$$
$$0 = (r_2 - \mathrm{j}x_2)I_2 - (X_m + x_2)I_3 - \mathrm{j}X_m(I_1 - I_2),$$
$$0 = (r_2 + \mathrm{j}x_2)I_3 + \mathrm{j}X_m I_3 + v(X_m + x_2)I_2 - vX_m I_1.$$

Les notations sont les mêmes que celles qui correspondent aux figures 1 et 4.

VII. Correspondance entre la théorie du champ transversal et la théorie des champs tournants. — On établit habituellement les équations du moteur monophasé en décomposant le champ d'induction réel dans l'entrefer en deux champs tournant en sens inverse, c'est-à-dire en considérant la théorie du moteur monophasé comme un corollaire de la théorie des moteurs polyphasés. Nous allons montrer que notre manière de procéder conduit aux mêmes résultats, et en particulier, que l'on peut retrouver la théorie du moteur polyphasé comme corollaire de la théorie du moteur monophasé.

A. **La théorie du moteur polyphasé.** — Considérons le moteur monophasé de la figure 11a, comprenant un enroulement primaire et un rotor polyphasé en cage d'écureuil ; les courants I_1, I_2, I_3, qui le parcourent sont reliés par les équations écrites ci-dessus.

Considérons maintenant le moteur de la figure 11b ; l'enroulement primaire est déphasé de $\pi/2$ dans l'espace par rapport à l'enroulement primaire précédent, et la tension V_1 appliquée est déphasée de $\pi/2$ dans le temps par rapport à U_1, et

$$V_1 = -\mathrm{j}U_1,\ J_1 = -\mathrm{j}I_1,$$
$$J_2 = -\mathrm{j}I_2,\ J_3 = -\mathrm{j}I_3.$$

Si maintenant on considère le moteur diphasé de la figure 11c, on constate qu'il est possible d'obtenir la superposition des mêmes courants, à condition de remplacer

$$U_1 \text{ par } E_1 = U_1 + \mathrm{j}X_m J_3 = U_1 - X_m I_2$$
$$\text{et} \quad V_1 \text{ par } E'_1 = -\mathrm{j}U_1 - \mathrm{j}X_m I_3 = -\mathrm{j}E_1,$$

d'où les équations

$$E_1 = (r_1 + \mathrm{j}x_1)I_1 + \mathrm{j}X_m(I_1 - I_2 - \mathrm{j}I_3),$$
$$0 = (r_2 + \mathrm{j}x_2)I_2 - vx_2 I_3 - vX_m I_3 - \mathrm{j}X_m(I_1 - I_2),$$
$$0 = (r_2 + \mathrm{j}x_2)I_3 + vx_2 I_2 + \mathrm{j}X_m I_3 - vX_m(I_1 - I_2)$$

en ajoutant, à la deuxième équation, la troisième multipliée par — j, on obtient en posant $i_2 = I_2 - jI_3$

$$E_1 = (R_1 + jx_1)I_1 + jX_m(I_1 - i_2)$$
$$0 = (r_2 + jx_2)i_2 + jvx_2i_2 + jvX_m(I_1 - I_2) - jX_m(I_1 - i_2).$$

La deuxième de ces équations peut s'écrire

$$0 = \left(\frac{R_2}{g} + jx_2\right) i_2 - jX_m(I_1 - i_2)$$

ce qui montre que l'on retrouve le schéma équivalent du moteur polyphasé (fig. 11d).

B. **Schéma équivalent du moteur monophasé.** — Considérons à nouveau le système de trois équations représentant le fonctionnement du moteur asynchrone monophasé, et proposons-nous de faire apparaître les composantes symétriques des deux forces magnétomotrices I_2 et I_3, en n'oubliant pas que ces deux grandeurs sont déphasées à la fois dans le temps et dans l'espace.

$i_2 = I_2 - jI_3$ composante directe,
$i_3 = I_2 + jI_3$ composante inverse.

Il vient

$$\begin{cases} U_1 = (r_1 + jx_1)I_1 + \frac{jX_m}{2}(I_1 - I_2 + jI_3) + \frac{jX_m}{2}(I_1 - I_2 - jI_3), \\ 0 = (r_2 + jx_2)(I_2 - jI_3) - vx_2(jI_2 + I_3) - vX_m(I_3 - jI_1 + jI_2) - jX_m(I_1 - I_2 + jI_3), \\ 0 = (r_2 + jx_2)(I_2 + jI_3) + vx_2(jI_2 - I_3) - vX_m(I_3 + jI_1 - jI_2) - jX_m(I_1 - I_2 - jI_3). \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = (r_1 + Ix_1)I_1 + \frac{jX_m}{2}(I_1 - i_2) + \frac{jX_m}{2}(I_1 - i_3), \\ 0 = [r_2 + j(1 - v)x_2] - jX_m(1 - v)(I_1 - i_2), \\ 0 = [r_2 + j(1 + v)x_2] - jX_m(1 + v)(I_1 - i_3), \end{cases}$$

ce qui conduit, puisque $1 - v = g$ et $1 + v = 2 - g$, au schéma classique de la figure 11e.

VIII. **Esquisse d'une méthode générale de calcul des moteurs asynchrones monophasés à phase auxiliaire.** — A. **Généralisations des équations.** — Si l'on pose

$$U'_1 = jX_m(I_1 - I_2),$$
$$U''_1 = -jX_mI_3,$$

on obtient le système

$$U_1 = (r_1 + jx_1)I_1 + U'_1,$$
$$0 = (r_2 + jx_2)I_2 - vx_2I_3 - jvU''_1 - U'_1,$$
$$0 = (r_2 + jx_2)I_3 + vx_2I_2 - U''_1 + jvU'_1.$$

Ceci revient à représenter le flux dans l'axe direct par la tension qu'il engendre dans l'enroulement primaire ; de même, le flux dans l'axe transverse est représenté par U''_1, tension qu'il engendrerait dans un enroulement identique à l'enroulement primaire, mais disposé suivant l'axe transverse.

Il apparaît alors, si l'on se reporte à l'établissement des équation (paragraphe VI. A.) que l'origine des tensions U'_1 et U''_1 n'intervient pas dans les relations entre I_2, I_3, U'_1 et U''_1, c'est-à-dire que ces relations seraient identiques pour un moteur portant un nombre quelconque d'enroulements, à condition que ceux-ci soient toujours sinusoïdalement répartis, et que U'_1 et U''_1 représentent bien les flux dans les axes direct et transverse. Nous ferons un large usage de cette remarque dans la suite de ce travail.

B. **Étude des relations entre I_2, I_3, U'_1 et U''_1.** — Nous pouvons résoudre le système d'équations

$$(R_2 + jx_2)I_2 - vx_2I_3 = U'_1 + jvU''_1,$$
$$vx_2I_2 + (R_2 + jx_2)I_3 = -jvU'_1 + U''_1,$$

ce qui donne

$$I_2 = \frac{U'_1[r_2 + j(1 - v^2)x^2] + jvr_2U''_1}{r^2_2 - (1 - v^2)x^2_2 + 2jr_2x_2},$$
$$I_3 = \frac{-jvr_2U'_1 + U''_1[r_2 + j(1 - v^2)x_2]}{r^2_2 - (1 - v^2)x^2_2 + 2jr_2x_2},$$

ou encore

$$I_2 = \frac{1}{r_2}(\alpha U'_1 + \beta U''_1),$$
$$I_3 = \frac{1}{r_2}(-\beta U'_1 + \alpha U''_1).$$

avec $t = \operatorname{tg}\psi = \frac{x_2}{r_2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}$,

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1 + j(1 - v^2)t^2}{1 - (1 - v^2)t^2 + 2jt}, \\ \beta = \dfrac{jv}{1 - (1 - v^2)t^2 + 2jt}. \end{cases}$$

Les nombres α et β sont des fonctions de v et de t, que nous écrivons $\alpha(v, t)$ et $\beta(v, t)$. Nous allons étudier le lieu des points A et B dont α et β sont les affixes lorsque $v = \text{Cte}$ ou lorsque $t = \text{Cte}$.

Tout d'abord, remarquons que, à $t = \text{Cte}$, le lieu du point A est un cercle puisque,

$$\alpha = \frac{1 + jt - jv^2t}{(1 + jt)^2 + v^2t^2}$$

est une fonction homographique du paramètre v^2.

On connait facilement trois points de ce cercle

$$\alpha(0, t) = \frac{1}{1 + j\operatorname{tg}\psi} = \cos\psi \angle -\psi$$
$$\alpha(1, t) = \frac{1}{1 + 2j\operatorname{tg}\psi} = \cos\varphi \angle -\varphi$$
$$\alpha(t, \infty) = \frac{-j}{\operatorname{tg}\psi}.$$

Le lien des points d'affixes α $(0, t)$ et α $(1, t)$ est le cercle Γ (fig. 12).

Comme on voit que le cercle coupe toujours l'axe des imaginaires, on peut chercher à déterminer le deuxième point de rencontre en écrivant

$$\alpha = \frac{1 + j(1 - v^2)t}{1 - (1 - v^2)t^2 - 2jt}$$
$$= \frac{1 + t^2(1 - v^2) - jt[2 - (1 - v^2) + t^2(1 - v^2)^2]}{[1 - (1 - v^2)t^2] + 4t^2}.$$

La partie réelle s'annule pour

$$1 - v^2 = \frac{-1}{t^2}, \qquad v^2 = \frac{1+t^2}{t^2}\,\frac{1}{\sin^2\psi}$$

et la partie imaginaire vaut alors $-\mathrm{j}/2t$, ce qui est une valeur très simple

$$\alpha\left(\frac{1}{\sin\psi}, \operatorname{tg}\psi\right) = -\frac{\mathrm{j}}{2\operatorname{tg}\psi} = \frac{\mathrm{j}}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

On peut aussi chercher à connaître la tangente au point $v = \infty$, qui est nécessaire pour déterminer l'échelle linéaire des V^2. A cet effet, nous écrivons

$$\alpha = \frac{1 + \mathrm{j}t - v^2 t}{(1+\mathrm{j}t)^2 + v^2 t^2} = \frac{-\mathrm{j}}{t} + \frac{1}{-\mathrm{j}t(1+\mathrm{j}t) - \mathrm{j}\dfrac{v^2 t^3}{1+\mathrm{j}}}$$

l'argument de $-\mathrm{j}t^3/(1+\mathrm{j}t)$ est égal à $-90^\circ - \psi$, d'où l'argument cherché, égal à $90^\circ + \psi$.

Si l'on veut obtenir la tangente au cercle au point $v = 0$, on posera

$$\alpha = \frac{1 + \mathrm{j}t - v^2 t}{(1+\mathrm{j}t)^2 + v^2 t^2} = \frac{A_0 + mA_1}{B_0 + mB_1}$$

et on voit que

$$\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}m}\right)_{m=0} = \frac{A_1 B_0 - A_0 B_1}{B_0^2}\,\frac{-\mathrm{j}t}{(1+\mathrm{j}t)^3}$$

ce qui donne $-\dfrac{\pi}{2} - 3\psi$ pour argument de la tangente au cercle.

Les autres propriétés du cercle étudié sont fort nombreuses ; on en a noté quelques-unes sur la figure. Ajoutons seulement que le centre a pour affixe

$$-\frac{1}{4\operatorname{tg}^2\psi} - \frac{3\mathrm{j}}{4\operatorname{tg}\psi} \qquad \text{(fig. 12).}$$

Le point représentatif du facteur β ne décrit pas des lieux possédant des propriétés aussi remarquables. Nous avons seulement les relations

$$\beta(v, 0) = \mathrm{j}v,$$

$$\beta(1, t) = \frac{\mathrm{j}}{1 + 2\mathrm{j}t},$$

qui permettent de placer deux points sur les courbes $v = \text{Cte}$ ou $t = \text{Cte}$ (fig. 13).

La construction d'un abaque général de $\alpha(v, t)$ et de $\beta(v, t)$ serait difficile, parce que les courbes $v = \text{Cte}$ ou $t = \text{Cte}$ se coupent ; cependant, la construction d'une table, ou d'un jeu de courbes, est tout à fait possible et permettra d'abréger considérablement les calculs, car les interpolations sont toujours faciles.

C. **Méthode générale d'étude.** — Nous appellerons désormais moteur à induction idéal un moteur à induction dont l'entrefer est constant et dont tout enroulement est réparti sinusoïdalement.

Supposons que nous étudions le moteur de la figure 11f, qui est bipolaire et dont les deux enroulements sont alimentés par deux tensions sinusoïdales, de même fréquence, mais de module et de phase quelconques. On peut toujours supposer qu'ils ont le même nombre de spires, *cette condition n'étant pas restrictive.* Fixons-nous deux régimes fictifs de fonctionnement, à une certaine vitesse angulaire $v\omega$ du moteur, et composons-les de manière à obtenir un fonctionnement correspondant à un régime réel.

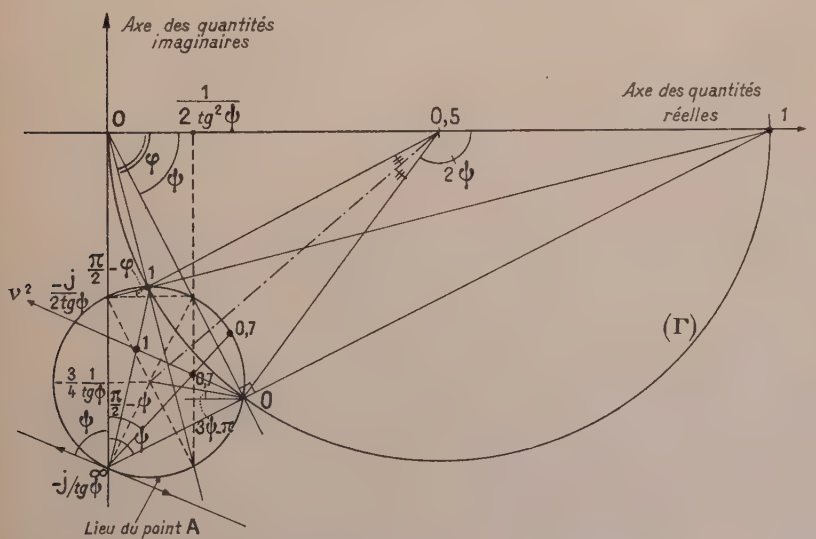

Fig. 12. — Diagramme relatif à l'étude de $\alpha(v, t)$.

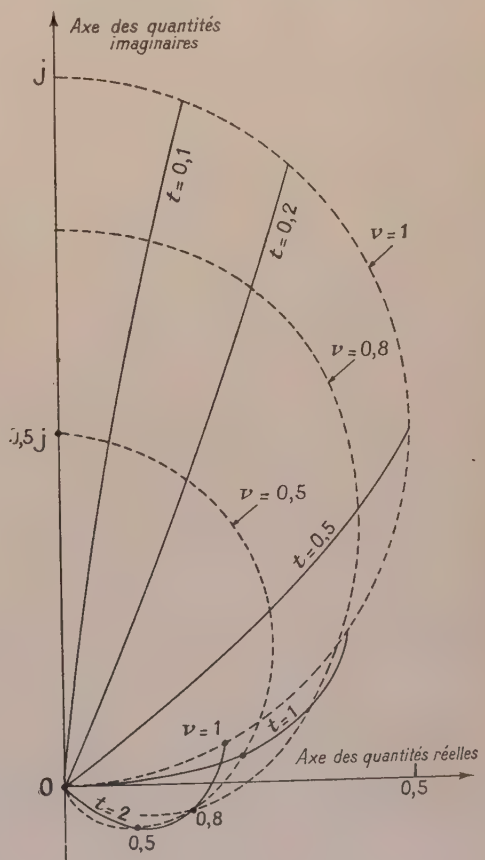

Fig. 13. — Diagramme relatif à l'étude de $\beta(v, t)$.

A cet effet, nous remarquerons à nouveau que les équations étudiées au paragraphe VIII. B. ne sont nullement restrictives quant à la source des tensions U'_1 et U''_1. En particulier, nous avons dans le cas présent, avec des notations évidentes

$$\begin{aligned}
U_1 &= (R_1 + jx_1)I_1 + U'_1 + jX_{1a}(I_1 - I_a),\\
U_a &= (R_a + jx_a) + U_1 \cos\delta + U''_1 \sin\delta - jX_m(I_1 - I_a),\\
0 &= (R_2 + jx_2)I_2 - vx_2 I_3 - U'_1 - jvU''_1,\\
0 &= (R_2 + jx_1)I_3 + vx_2 I_2 + jvU'_1 - U''_1,\\
U'_1 &= jX_m(I_1 - I_2 - I_a \cos\delta),\\
U''_1 &= jX_m(I_a \sin\delta - I_3),
\end{aligned}$$

Premier régime fictif : cherchons quelles doivent être les tensions U_1 et U_{a1} ainsi que les courants I_{11}, I_{a1}, I_{21}, I_{31}, pour que l'on ait

$$U'_{11} = 100 \text{ volts (origine des phases)},$$
$$U''_{12} = 0.$$

A cet effet, il suffit d'avoir les coefficients α et β du paragraphe B. On obtient

$$I_{21} = \frac{100\alpha}{r_2}, \quad I_{31} = \frac{-100\beta}{r_2}, \quad I_{a1} = \frac{-100\beta}{r_2 \sin\delta},$$
$$I_{11} = \frac{100}{r_2}\left(\alpha + \frac{\beta}{\cos\delta} - \frac{jr_2}{X_m}\right)$$

ce qui permet de calculer U_{11} et U_{a1}.

Deuxième régime fictif : cherchons les valeurs de U_{12}, U_{a2}, ... telles que

$$U'_{12} = 0,$$
$$U''_{12} = 100 \text{ volts (origine des phases)}.$$

Pour cela, il faut avoir

$$I_{22} = \frac{100\beta}{r_2}, \quad I_{32} = \frac{100\alpha}{r_2}, \quad I_{12} = \frac{100\beta}{r_2 \cos\alpha},$$
$$I_{a2} = \frac{100}{r_2 \sin\delta}\left(\alpha - \frac{jr_2}{X_m}\right),$$

d'où U_{12} et U_{a2}.

Troisième régime, correspondant au fonctionnement réel. Si maintenant nous nous fixons un régime tel que

$U'_1 = A$ (origine des phases ; A est un nombre réel),
$U''_1 = B$ (B est un nombre complexe) ;

les tensions aux bornes seront

$$U_{13} = AU_{11} + BU_{12},$$
$$U_{a3} = AU_{a1} + BU_{a2}.$$

Il suffit de choisir A et B de manière que $U_{13} = U_1$, $U_{a3} = U_a$, ce qui s'obtient en résolvant un système de deux équations à deux inconnues. On aura alors

$$I_1 = AI_{11} + BI_{12},$$
$$I_a = AI_{a1} + BI_{a2}.$$

Cette méthode permet d'étudier en particulier les moteurs à bobine écran et les moteurs à phase résistante ou capacitive, sans être gêné par le fait que les enroulements ne sont pas en quadrature.

DEUXIÈME PARTIE : Les moteurs à induction monophasés à bobines-écrans

I. Principe. — A. Généralités. — Un moteur à induction monophasé ne possède pas de couple de démarrage. Si l'on s'appuie sur la théorie des champs tournants, on dira que le flux dans l'entrefer comprend deux flux tournant à la même vitesse, en sens inverses, et donnant lieu, à l'arrêt, à deux couples égaux et opposés. Si l'on s'appuie sur la théorie du champ transversal, on dira qu'il n'existe ni flux ni courant suivant l'axe transversal, parce que ceux-ci sont créés par la rotation même de l'induit et sont donc nuls à l'arrêt.

On a donc été amené à imaginer un certain nombre d'artifices dont l'objet est de créer un champ tournant ou, ce qui revient au même, un flux transversal, en l'absence de tout mouvement.

Le premier procédé utilisé est celui de la phase auxiliaire. On montre en effet que l'on n'a pas avantage à

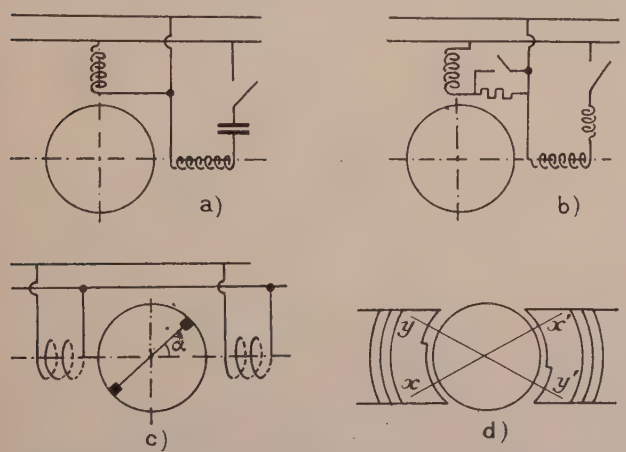

Fig. 14. — Schémas des artifices utilisés pour créer un champ tournant dans un moteur monophasé. Comparaison du changement de couplage pour le moteur à condensateur et pour le moteur à bobine-écran.

bobiner toutes les encoches d'une machine monophasée. On peut dans ces conditions disposer un deuxième bobinage dans les encoches restées libres. Si les deux bobinages ont des impédances très différentes, et s'ils sont décalés, dans l'espace, d'un angle voisin de 90 degrés électriques, on créera, en les reliant au même réseau monophasé, deux flux déphasés l'un par rapport à l'autre; il y aura donc apparition d'un couple de démarrage. Dans la pratique, on rend les impédances des deux enroulements différentes non seulement par la construction même du bobinage (nombre de spires et section du fil), mais encore par l'adjonction d'impédances auxiliaires (inductances, capacités, résistances). Très souvent, on s'arrange pour éliminer les éléments auxiliaires, à l'aide d'un interrupteur à force centrifuge, dès que la vitesse a atteint une certaine valeur (fig. 14a et 14b).

Un deuxième procédé consiste à créer une dyssymétrie du rotor, cette dyssymétrie restant fixe par rapport au stator. Par exemple, dans le moteur à répulsion, le rotor peut être considéré comme une bobine possédant $N\cos\alpha$ spires suivant l'axe principal, et $N\sin\alpha$ spires suivant l'axe transverse; au démarrage, le flux principal engendre dans le rotor une force électromotrice, et provoque un courant de réaction qui crée, dans l'enroulement principal, un appel de courant, et, dans l'axe transverse, un flux en phase avec lui ; il se produit donc un couple de démarrage (fig. 14c).

Dans le moteur à démarrage par variation de réluctance (qu'il ne faut pas confondre avec le moteur « à réluctance », qui est un moteur synchrone), les forces magnétomotrices suivant les axes xx′ et yy′ (fig. 14d) sont égales; mais, à cause des différences d'entrefer, les réactances magnétisantes et les réactances de fuite du rotor sont différentes; il en résulte que, même en l'absence de mouvement, les flux suivant les deux axes sont déphasés et qu'il existe un couple de démarrage. Comme dans le cas du moteur à répulsion, le rotor est dyssymétrique, mais cette dyssymétrie est fixe par rapport au stator.

B. Le moteur à bobines-écrans. — Le principe de ce moteur s'apparente à la fois aux deux principes ci-dessus.

Considérons d'abord un circuit magnétique et cherchons quel est l'effet d'un enroulement en court-circuit sur la réluctance apparente de ce circuit, vue d'un enroulement d'excitation (fig. 15a) ; soient alors

Φ le flux qui traverse le circuit magnétique,
S_0 la réluctance en l'absence de l'enroulement,
S'_0 la réluctance apparente en présence de l'enroulement,
n le nombre de spires de l'enroulement d'excitation,
n' le nombre de spires de l'enroulement en court-circuit,

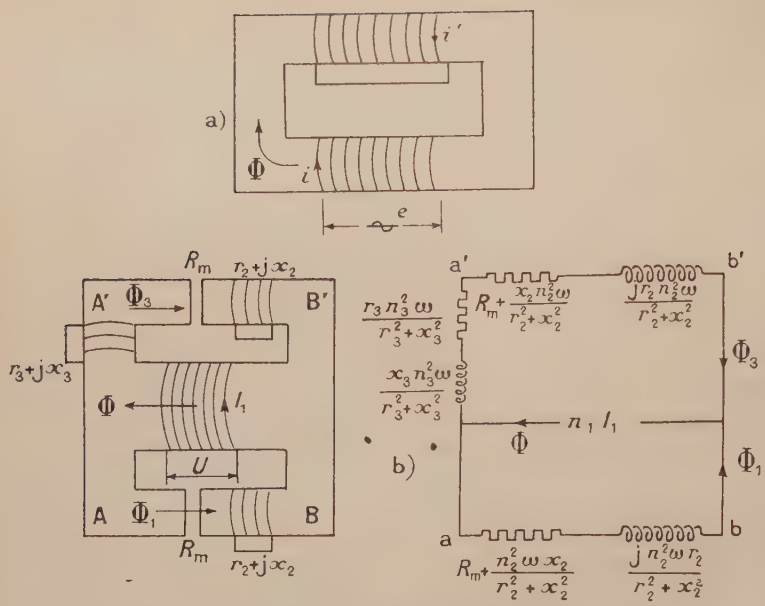

Fig. 15a. — Influence d'un enroulement en court-circuit placé sur un circuit magnétique.

Fig. 15b. — Schémas équivalents d'un moteur à bobine-écran sans fuites entre les cornes polaires.

R et jX_t la résistance et la réactance de fuites de l'enroulement d'excitation,
i' le courant dans l'enroulement en court-circuit,
i le courant dans l'enroulement d'excitation,
e la tension d'alimentation.

Le flux Φ produit dans l'enroulement en court-circuit une force électromotrice

$$e' = -jn'\omega\Phi$$

d'où un courant

$$i' = -\frac{jn'\omega\Phi}{r}.$$

L'équilibre des forces magnétomotrices se traduit par la relation :

$$ni + n'i' = S_0\Phi,$$

or $e = jn\omega\Phi$ et $ni = S'_0\Phi$,

$$ni = S'_0\frac{e}{jn\omega},$$

d'où l'impédance totale

$$Z_1 = \frac{e}{i} = \frac{jn^2\omega}{S_0 + j\dfrac{n'^2\omega}{r}} = \frac{jn^2\omega}{S'_0}.$$

L'introduction d'une bobine en court-circuit agit comme l'adjonction d'un terme complexe à la réluctance du circuit magnétique. Le flux résultant est à la fois diminué et retardé, par rapport à ce qu'il est en l'absence de bobine-écran. Si r diminue indéfiniment, la réluctance devient infinie : c'est le principe de la bobine de Frager. Cet effet est moindre si l'enroulement en court-circuit possède une réactance de fuites x_t ; la réluctance devient alors

$$S_0 + j\frac{n'^2\omega}{r + jx_t}.$$

Par conséquent, si l'on dispose, sur un moteur monophasé, un bobinage en court-circuit, de telle sorte que ce bobinage embrasse seulement une partie du flux créé par le bobinage principal, il y aura dans l'entrefer deux flux déphasés l'un par rapport à l'autre, et le moteur est capable de démarrer ; le couple de démarrage tendra à faire tourner le rotor de la portion non baguée vers la portion baguée des pôles (fig. 16). En effet, d'après l'étude que nous avons faite ci-dessus, le moteur est schématiquement représentable par le circuit magnétique de la figure 15b et son schéma de circuit électrique équivalent. Les éléments AB, ab, représentent l'axe direct, les éléments A'B', a'b' représentent l'axe transverse. On voit que le flux dans AB est en retard sur le flux dans A'B'.

C'est seulement en 1923 que l'on eut l'idée (fig. 17) d'augmenter considérablement les fuites entre les pôles de la machine, en rapprochant les cornes polaires, ou même en les réunissant. On obtient alors les schémas analogiques des figures 18a et 18b. Il est à remarquer que, dans ces conditions, il n'y a aucune raison pour que le flux en

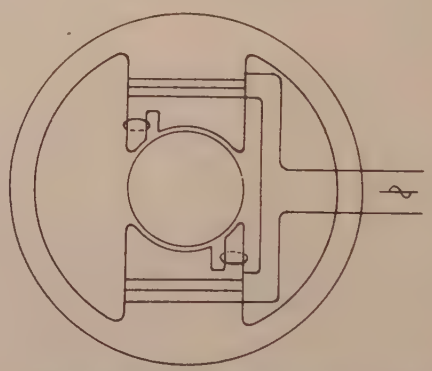

Fig. 16. — Schéma d'un moteur monophasé à bobine-écran.

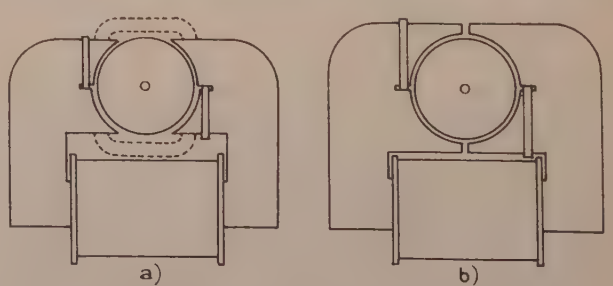

Fig. 17. — Schéma relatif à l'augmentation des fuites entre cornes polaires (Brevet Landis et Gyr).

A′B′ soit déphasé en arrière sur le flux en AB (ou pour que la tension aux bornes de a′b′ soit déphasée en arrière sur la tension aux bornes de ab) ; le déphasage

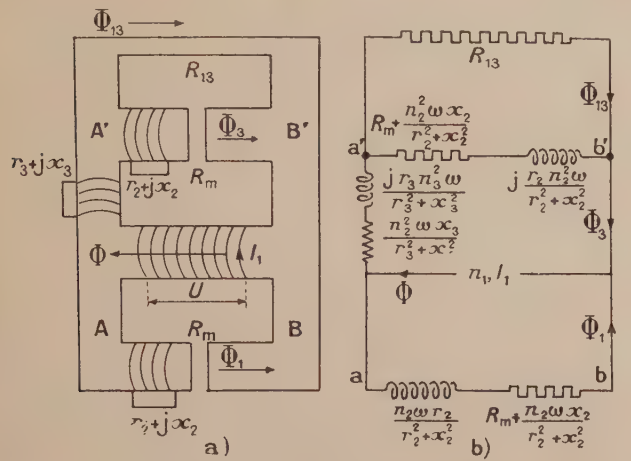

Fig. 18. — Schéma équivalent d'un moteur à bobines-écrans avec fuites entre les cornes polaires.

peut être nul, ou dans le sens contraire, suivant les ordres de grandeur de $r_2 + jx_2$, $r_3 + jx_3$, X_m et X_{13}.

Nous aurons par la suite l'occasion d'examiner un exemple numérique (paragraphe III, B.), aussi n'insisterons-nous pas. Nous avons ainsi envisagé la bobine-écran comme une véritable phase auxiliaire connectée magnétiquement au réseau ; mais il est possible d'en donner une autre idée : la présence d'un enroulement

Fig. 19. — Moteur monophasé à pôles saillants à bobines-écrans d'après Trickey.

en court-circuit modifie la réluctance d'une partie du circuit magnétique de la machine en ajoutant à cette réluctance un terme complexe. On a ainsi quelque chose d'analogue au principe des moteurs à démarrage par variation de réluctance, où l'on modifie la réluctance d'une partie du circuit magnétique par une variation d'entrefer, ce qui ajoute un terme réel à la réluctance considérée.

C. Types de construction du moteur à bobines-écrans. — Les types de moteurs à bobines-écrans sont extrêmement nombreux, car la gamme des puissances pour lesquelles ils sont construits va de 0,001 ch à 0,250 ch. Pour les puissances inférieures à 1/20 de cheval, c'est le moteur normal à courant alternatif à puissance constante. Il est de construction simple, peu coûteuse, extrêmement robuste et sûr, comme un moteur à induction polyphasé, parce qu'il n'utilise ni collecteur, ni interrupteur, bague collectrice, balai, régulateur, ni contact mobile ou vibrant d'aucune sorte.

On peut très facilement le construire pour deux tensions d'utilisation différentes, sans modifier pour cela la forme des caractéristiques externes ; en effet, si l'on change le couplage extérieur des bobinages primaires, on change automatiquement la répartition des phases auxiliaires, alors que, pour un moteur à

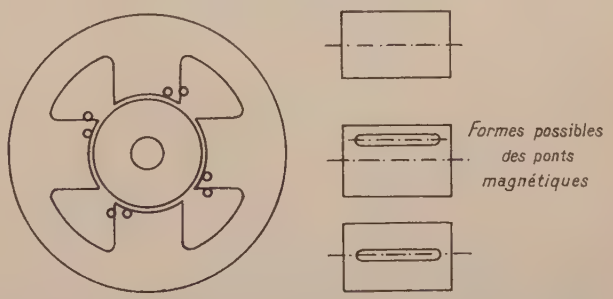

Fig. 20. — Moteur à pôles saillants à bobines-écrans, à ponts magnétiques réalisables suivant les formes indiquées.

condensateur, on est obligé de recourir à des couplages peu élégants, qui non seulement entraînent des complications de construction et d'utilisation, mais modifient aussi le fonctionnement du moteur.

Ce type de moteur a un mauvais rendement, ce qui importe peu lorsque les puissances en jeu sont faibles. Pour les puissances les plus importantes, la simplicité de construction et l'absence de tout organe auxiliaire compense encore parfois la faiblesse du rendement.

1. Construction a pôles saillants. — La figure 19 représente un mode de découpage pratiqué couramment pour les puissances supérieures à 0,005 ch. Il y a autant

Fig. 21. — Moteur à pôles saillants à bobines-écrans dans lequel les fuites sont produites par le rapprochemen des cornes polaires.

de bobines au bobinage principal qu'il y a de pôles : quatre dans ce cas. Les bobines-écrans, une par pôle, sont placées avant les bobines principales ; ces dernières peuvent être formées sur gabarit, glissées sous les pôles et tenues par des cales ; s'il y a lieu, celles-ci sont en métal magnétique et constituent des « ponts

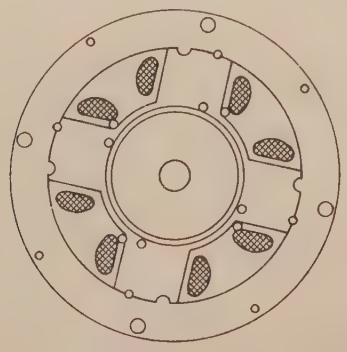

Fig. 22. — Moteur à pôles saillants à anneau magnétique fixe, d'après Trickey.

magnétiques » entre les pôles afin d'augmenter les fuites, comme il a été dit précédemment. On peut aussi réaliser les enroulements principaux directement sur une machine à bobiner très simple.

On emploie également le découpage de la figure 20 en disposant ou non des ponts ayant la forme indiquée sur la figure c'est-à-dire : soit un pôle plein où le flux est pratiquement limité par la saturation, soit un pont où la réluctance est concentrée en une fente, cette fente étant placée au milieu du pont ou du côté de la bobine-écran.

Une autre variante est celle de la figure 21, utilisée pour les plus fortes puissances : les fuites sont produites uniquement par le rapprochement des cornes polaires et l'entrefer est semblable à celui d'un moteur à démarrage par variation de réluctance. Enfin, la figure 22 représente une construction qui utilise un anneau magnétique monté à demeure ; le circuit magnétique du stator est formé de deux parties et les côtés du pôle sont droits et parallèles ; on pose d'abord les

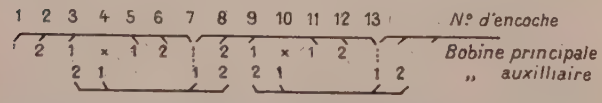

Fig. 23. — Tableau de répartition d'un moteur à bobinage réparti à 6 pôles et 36 encoches, d'après Veinott.

bobines-écrans, puis les bobines principales peuvent être simplement enfilées ; après quoi la partie intérieure du circuit magnétique et ses bobinages sont montés à la presse dans l'anneau de tôles extérieur.

2. Construction squelette. — Cette construction est représentée par les figures 17a et 17b ; elle est utilisée pour des moteurs de 0,0006 à 0,03 ch, en raison de sa simplicité ; on emploie souvent, pour ce type de moteur, plusieurs bobines-écrans par pôle, chacune ayant une section différente et embrassant un arc différent : on améliore ainsi la répartition du champ de la bobine-écran.

3. Moteurs a bobinages répartis. — Les tôles découpées du stator sont semblables à celles utilisées pour les moteurs d'induction monophasés ou polyphasés, et le bobinage en court-circuit est analogue à celui d'un moteur à phase auxiliaire de démarrage, sauf qu'il est mis en court-circuit sur lui-même et décalé au moins de 90 degrés électriques par rapport au bobinage principal. Un tel bobinage est représenté en figure 23.

D. Classification des moteurs à bobines-écrans. — Nous allons distinguer maintenant trois types principaux parmi les moteurs que nous venons de décrire, la distinction étant faite, non suivant l'allure générale du moteur, mais suivant les caractéristiques magnétiques de l'entrefer et du pont :

1° *Premier type.* — Ce type de moteur est représenté en figure 17b. Supposons que les enroulements du rotor

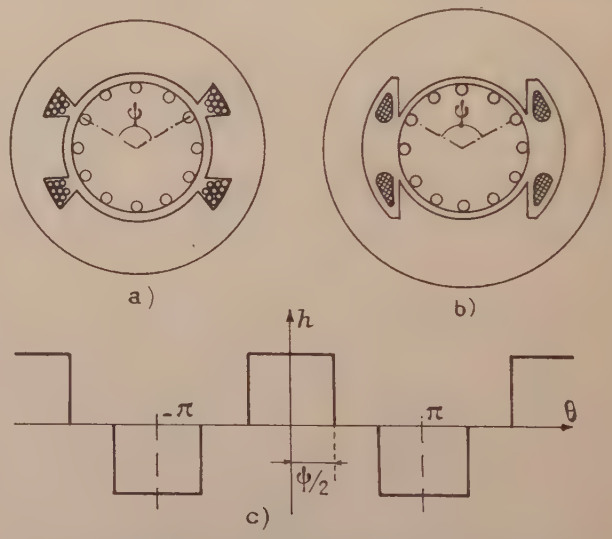

Fig. 24. — Schémas relatifs à un moteur à entrefer constant considéré dans l'étude des enroulements à pôle entier.

et de la bobine-écran soient ouverts et que l'enroulement principal soit excité : la courbe du champ dans l'entrefer est une courbe en créneaux. D'autre part, la machine, vue du rotor, est symétrique, c'est-à-dire que si le rotor est le siège de forces électromotrices à répartition sinusoïdale, le système de courants qui en résultera sera également à répartition sinusoïdale, quel que soit l'axe du système de forces électromotrices.

2° *Deuxième type.* — Considérons le moteur de la figure 20, et supposons qu'il ne comporte pas de pont magnétique. Si le rotor et les écrans sont ouverts, le champ dans l'entrefer est encore réparti suivant une courbe en créneaux, mais ici, la largeur d'un créneau est inférieure à 180° (on prend le plus souvent

120°). Et, d'autre part, le rotor n'est pas placé dans un entrefer constant : il en résulte que si le rotor est le siège d'un système de forces électromotrices à répartition sinusoïdale, le système des courants qui seront engendrés n'aura pas une répartition sinusoïdale, et la répartition des courants dépendra de la position de l'axe des forces électromotrices.

3° *Troisième type.* — Il est représenté en figure 21 (la distance entre les cornes polaires est supposée suffisamment petite devant l'arc polaire). La courbe de répartition du champ, toujours dans les mêmes conditions, est une courbe qui possède deux valeurs positives et les deux valeurs opposées (c'est la superposition de deux courbes en crénaux). Le rotor n'est pas placé dans un entrefer symétrique.

II. Etude des enroulements à pôle entier. — **A. Équivalence d'un enroulement réel et d'une série d'enroulements harmoniques.** — Reprenons le raisonnement que nous avons utilisé pour l'étude du champ crée par un enroulement sinusoïdalement réparti, et appliquons-le au cas d'un entrefer quelconque et d'un enroulement à répartition quelconque. Nous avons

$$\mathrm{d}(be) = \mu_0 ni\mathrm{d}\theta$$

d'où

$$b = \frac{\mu_0 i}{e}\int n\mathrm{d}\theta\ ;$$

l'induction est le produit de la perméance de l'entrefer par la force magnétomotrice au point considéré.

Considérons le moteur de la figure 24a. Il comporte N_T spires par pôle, et l'entrefer est constant, si l'on néglige l'ouverture des encoches. Le nombre de conducteurs par unité d'angle sera représentable par une série d'impulsions alternativement positives et négatives, et l'induction dans l'entrefer sera représentée par la figure 24c. On peut écrire

$$n = \frac{4pN_T}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{np\psi}{2}\sin np\theta,$$

ce qui met en évidence que l'enroulement réel peut être remplacé par une série d'enroulements fictifs sinusoïdalement répartis, que nous appellerons enroulements harmoniques de l'enroulement réel. L'entrefer étant constant, chacun de ces enroulements crée un champ d'induction sinusoïdal de même polarité que lui, ce qui implique, d'après le paragraphe II de la première partie, que les différents enroulements harmoniques ne possèdent pas, entre eux, de mutuelle inductance.

Considérons maintenant le moteur de la figure 24b ; en première approximation, on peut admettre que toutes les lignes de force du primaire qui atteignent le rotor passent par la face des pôles, c'est-à-dire que la perméance de l'entrefer est nulle entre les cornes polaires. La forme de la force magnétomotrice du primaire présente exactement le même aspect que dans le cas de la figure 24a. On pourrait faire le même raisonnement que pour celui-ci ; cependant, les conducteurs n'étant pas placés dans des encoches, il est difficile de définir le nombre de conducteurs par unité d'angle. Nous tiendrons donc le raisonnement suivant : le champ dans l'entrefer, créé par un courant i parcourant l'enroulement réel, est équivalent à celui d'un enroulement quelconque parcouru par le même courant, à la condition que

$$\mathrm{n}(\theta) = \mathrm{n}(\pi - p\theta) = -\mathrm{n}(\pi + p\theta)$$

$$n = 0 \quad \text{pour} \quad -\frac{\psi}{2} + \frac{k\pi}{p} < \theta < \frac{\psi}{2} + \frac{k\pi}{p}$$

et

$$\int_{\frac{\psi}{2}-\pi+\frac{k\pi}{p}}^{-\frac{\psi}{2}+k\frac{\pi}{p}} \mathrm{n}(\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\int_{\frac{\psi}{2}+k\frac{\pi}{p}}^{\pi-\frac{\psi}{2}+\frac{k\pi}{p}} \mathrm{n}(\theta)\,\mathrm{d}\theta = N_T.$$

En effet, dans les intervalles où

$$n \neq 0, \frac{1}{e} = 0, \quad \text{donc} \quad b = \frac{\mu_0 i}{e}\int n\mathrm{d}\theta$$

reste le même quelle que soit la forme de e.
Dans ces conditions, on peut choisir pour $n(\theta)$ la même distribution que pour le moteur de la figure 24a. Mais, du fait que $1/e$ n'est pas constant, un enroulement sinusoïdal ne crée plus un champ d'induction sinusoïdal, et il peut donc exister un couplage entre les différents enroulements harmoniques.

Cette remarque montre que l'on doit diviser l'étude des moteurs monophasés en deux parties : 1° l'étude des moteurs dont l'entrefer peut raisonnablement être considéré comme constant ; 2° l'étude des moteurs dont l'entrefer est fortement variable. Cette deuxième partie comporte d'ailleurs presque uniquement les moteurs à variation de réluctance et les moteurs à bobines-écrans.

B. Dispersion différentielle d'un enroulement à pôle entier. — Krondl et Georges ont remarqué que le champ, dans une machine polyphasée, n'est jamais tournant, comme le suppose la théorie ; ils ont montré que le champ réel devait plutôt être considéré comme tournant et se déformant périodiquement. Pour un enroulement monophasé à pôle entier, ce phénomène est facile à vérifier, et il est aisé de trouver la formule donnant la chute de tension supplémentaire correspondante.

Soit par exemple, un moteur à entrefer constant e, dont le stator est bobiné à pôle entier, avec $\psi = 135$ degrés électriques, ce qui réduit à peu de chose l'importance des harmoniques 3 et 5 de la courbe de champ ; nous supposerons que le rotor est biaisé de 50 degrés électriques, ce qui supprime pratiquement toute influence du champ harmonique 7 sur les enroulements rotoriques. Nous sommes en droit de supposer que seul le champ harmonique 1 créé par le stator agira sur le rotor. Dans ces conditions, alimentons le stator, le

rotor étant ouvert ; l'impédance, vue de la source, sera par pôle

$$r_1 + j(x_t + x_e) + j\,\frac{\psi}{\pi}\,\frac{\omega N_T^2}{\mathcal{R}}$$

x_e, x_t étant les réactances de fuites dues à la perméance des encoches et des têtes de bobines, et $\mathcal{R}$ étant la réluctance correspondant à la surface d'un pôle et à un entrefer simple. Le dernier terme, la réactance d'entrefer, peut-être divisée elle-même en deux parties : la réactance qui correspond au flux coupé par l'harmonique 1, qui apparaîtra par la suite sous forme d'inductance mutuelle, et le reste, qui correspond à une chute inductive de tension au stator, sans intervenir dans les équations du rotor.

L'enroulement primaire se décompose en une infinité d'enroulements harmoniques de la forme

$$n_k = n_{mk} \sin kp\theta,$$

$$n_{mk} = \frac{4pN_T}{\pi} \sin \frac{kp\psi}{2} = \frac{2pN_T}{\left(\frac{\pi}{p\psi}\right)} \frac{\sin kp\frac{\psi}{2}}{p\frac{\psi}{2}}$$

et à chaque pôle de l'enroulement réel correspondent k pôles de l'enroulement d'ordre k. La réactance totale de ces k pôles est, en appliquant la formule du paragraphe III. C. et en remarquant que l'on doit prendre $k\mathcal{R}$ pour réluctance d'un pôle harmonique,

$$\frac{k\omega}{2k\mathcal{R}}\left(\frac{n_{mk}}{kp}\right)^2 = \frac{8\omega N_T^2}{\pi^2\mathcal{R}}\,\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{kp\psi}{2}$$

$$= k\,\frac{\omega}{2(k\mathcal{R})}\left[\frac{4pN_T}{\pi}\sin\frac{kp\psi}{2}\,\frac{1}{kp}\right]$$

et comme ces enroulements harmoniques ne possèdent aucune mutuelle inductance entre eux, on a

$$\frac{\psi}{\pi}\,\frac{\omega N_T^2}{2\mathcal{R}} = \frac{8\omega N_T^2}{\pi^2\mathcal{R}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{kp\psi}{2}.$$

Donc, si on veut tenir compte du seul harmonique 1, on devra introduire dans les fuites une réactance égale à

$$\frac{\omega N_T^2}{2\mathcal{R}}\left(\frac{\psi}{\pi} - \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{kp\psi}{2}\right).$$

Quant à la réactance mutuelle que nous venons de définir, il faudra elle-même la diviser en deux parties, si le rotor est biaisé (paragraphe VI. B). A l'ensemble des fuites de dispersion différentielle et des fuites par biaisage correspond ce que l'on désigne souvent comme la réactance des flux qui traversent l'entrefer sans agir sur le rotor.

C. Étude du « trou de couple » asynchrone d'un moteur polyphasé équilibré. — La courbe du couple en fonction de la vitesse des moteurs asynchrones monophasés, et particulièrement celle des moteurs à bobine-écran dont il sera question plus loin, présentent souvent un minimum au tiers de la vitesse de synchronisme. Pour les moteurs polyphasés, ce « trou de couple » est beaucoup moins marqué et se présente, lorsqu'il existe, aux environs du septième ou du cinquième du synchronisme. Le phénomène, qui n'est pas prévu par la théorie élémentaire, a des origines complexes. Tout d'abord, il est partiellement dû à des irrégularités inhérentes à la coulée lorsqu'il s'agit de moteurs à cage d'aluminium. Ces irrégularités sont évidemment difficiles à évaluer. Ensuite, il peut être dû à la forme des bobinages, comme nous allons le voir.

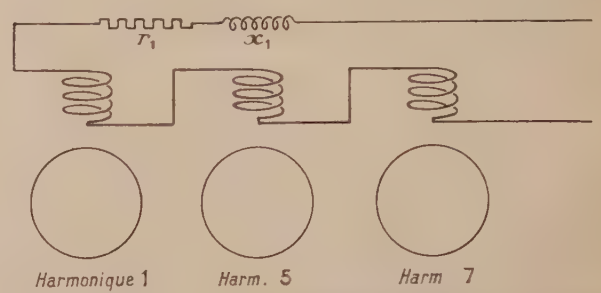

Fig. 25. — Schéma d'un moteur triphasé ramené à une phase.

Soit un moteur triphasé, à entrefer constant ; ses enroulements sont identiques, et décalés dans l'espace de $2\pi/3$ pour un moteur bipolaire. Remplaçons les enroulements réels par une série d'enroulements

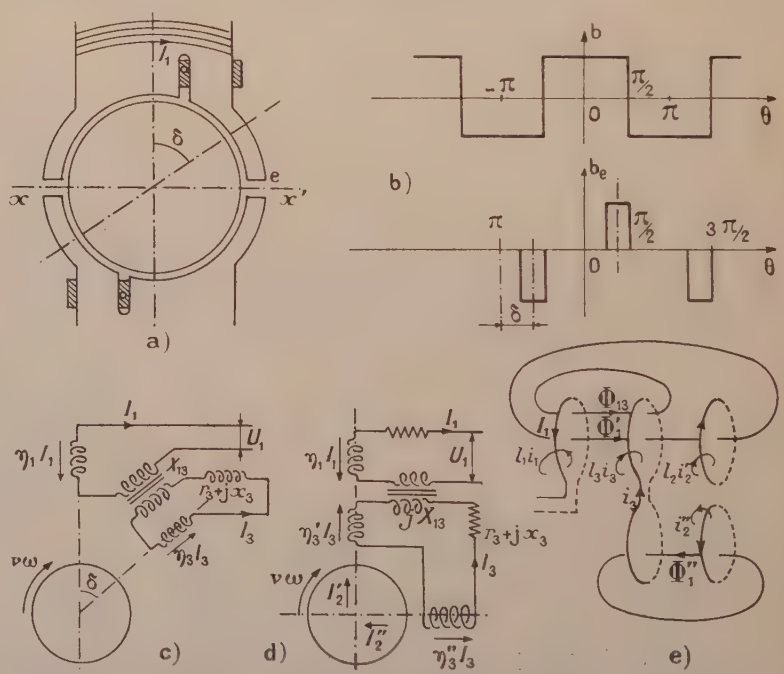

Fig. 26. — a) Schéma relatif à la description d'un moteur à entrefer constant ; b) Courbes de répartition du champ de la bobine principale et de celui de la bobine auxiliaire ; c) Schéma d'un moteur réduit aux harmoniques d'un des bobinages ; d) Schéma de la décomposition de l'enroulement en court-circuit ; e) Schéma de l'analyse des flux.

harmoniques ; nous trouverons tout d'abord trois enroulements sinusoïdalement répartis, de période 2π, décalés de $2\pi/3$; ce sont ces enroulements que la théorie classique fait seuls intervenir. Nous trouvons ensuite trois enroulements hexapolaires, déphasés d'un angle électrique $(2\pi/3) \times 3 = 2\pi$; ces enroulements ne donnent lieu à aucun champ dans l'entrefer, l'inductance propre cyclique qui leur correspond est donc nulle. Puis, nous trouvons les enroulements harmoniques 5, à dix pôles décalés de $2\pi + 4\pi/3$, c'est-à-dire engendrant un flux tournant inverse ; les enroulements harmoniques 7, décalés de $4\pi + 2\pi/3$, engendrant un champ tournant direct, etc.

Tous ces enroulements sont placés en série ; chacun possède une certaine mutuelle inductance avec le rotor, qu'il voit avec une certaine impédance, et dans lequel il engendre des courants. On peut donc représenter un moteur triphasé par le schéma de la figure 25.

Ce schéma n'est valable que pour un moteur triphasé (pour un moteur diphasé, on verrait apparaître l'harmonique 3), et tant que les harmoniques du rotor sont d'ordre suffisamment élevé, sinon on crée un couplage entre les enroulements harmoniques.

III. Étude du couple de démarrage du moteur monophasé à bobine-écran idéal. — **A. Équations générales.** — Considérons le moteur de la figure 26a. Les enroulements primaire et auxiliaire donnent lieu le long de l'entrefer à des forces magnétomotrices représentées sur la figure 26b. Décomposons chacun de ces enroulements en enroulements harmoniques, et supposons d'abord que nous puissions ne tenir compte que des deux enroulements fondamentaux. Nous obtenons le moteur de la figure 26c, que nous appellerons moteur monophasé à bobine-écran idéal.

D'après ce que nous savons des enroulements sinusoïdalement répartis, nous pouvons décomposer la bobine-écran idéale en deux enroulements perpendiculaires (fig. 26d). Soient alors

η_1 le nombre effectif de spires de l'enroulement primaire ; ce nombre peut toujours être pris égal à 1 ;
η_3 le nombre effectif de spires de l'enroulement auxiliaire ;
δ l'angle que forme l'axe de la bobine-écran avec l'axe de la machine ;
X_m la réactance magnétisante de l'entrefer ;
X_{13} la réactance qui correspond au flux commun au primaire et à la bobine-écran, sans agir sur le rotor ;
$z_1 = r_1 + jx_1$ l'impédance propre du primaire ;
$z_2 = r_2 + jx_2$ l'impédance du rotor ;
$z_3 = r_3 + jx_3$ l'impédance propre de la bobine-écran.

Toutes ces réactances et impédances sont évidemment vues du primaire. Soient encore

E la tension d'alimentation du moteur ;
I_1, I_3 les courants dans le primaire et la bobine-écran ;
I'_2, I''_2 les courants dans les axes direct et transverse du rotor ;
v le rapport de la vitesse angulaire considérée à la vitesse de synchronisme.

Les nombres effectifs de spires des deux enroulements remplaçant la bobine-écran seront donc :
$\eta'_3 = \eta_3 \cos\delta$ pour l'axe direct ;
$\eta''_3 = \eta_3 \sin\delta$ pour l'axe transverse.

Dans ces conditions, on a

$$E = (r_1 + jx_1)\, I_1 + \eta_1 U'_1 + jX_{13}(I_1 - I_3),$$
$$0 = (r_3 + jx_3)\, I_3 - jX_{13}(I_1 - I_3) - \eta'_3 U'_1 + \eta''_3 U''_1,$$
$$0 = (r_2 + jx_2)\, I'_2 - U'_1 - jvU'_1 - vx_2 I''_2,$$
$$0 = (r_2 + jx_2)\, I''_2 - U''_1 + jvV'_1 + vx_2 I'_2,$$
$$\Phi'_1 = \frac{X_m}{\omega}(\eta_1 I_1 - \eta'_3 I_3 - I'_2) = \frac{X_m}{\omega} i'_1 = -\frac{jU'_1}{\omega},$$
$$\Phi''_1 = \frac{X_m}{\omega}(-I''_2 + \eta''_3 I_3) = \frac{X_m}{\omega} i''_1 = -\frac{jU''_1}{\omega}.$$

B. Étude de l'influence de r_3 sur le couple de démarrage. — La méthode de calcul que nous suivrons est la suivante :

Supposons que nous nous ne fixions pas E, mais U'_1. Nous pouvons alors calculer U''_1, puis tous les courants de la machine, et enfin la tension U par laquelle il faut remplacer E pour que U'_1 ait effectivement la valeur fixée. Il suffit dans ces conditions de faire subir à tous les courants une réduction de rapport E/U pour trouver leur vraie valeur.

Supposons donc que nous connaissions U'_1 et $v = 0$.

Les deux équations relatives au rotor

$$Z_2 I'_2 - U''_1 = 0,$$
$$Z_2 I''_2 - U''_1 = 0.$$

permettent de calculer immédiatement

$$I'_2 = \frac{U'_1}{Z_2}$$

et

$$I'_2 + i'_1 = U'_1\left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{jX_m}\right) = \frac{U'_1}{Z'_2}$$

de même

$$I''_2 + i''_1 = \frac{U''_1}{Z'_2}.$$

Calculons, pour les reporter dans l'équation de la bobine-écran, $I_1 - I_3$ et I_3

$$I_3 = \frac{I''_2 + i''_1}{\eta''_3} = \frac{U''_1}{\eta''_3 Z'_2}$$

$$I_1 - I_3 = \frac{1}{\eta_1}(I'_2 + I'_1) - \frac{I''_2 + i''_1}{\eta''_3} = \frac{U'_1}{Z'_2} - \frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1 \eta''_3}\frac{U''_1}{Z'_2}$$

puisque

$$(r_3 + jx_3)\, I_3 + U''_1 - jX_{13}(I_1 - I_3) - U'_1 = 0$$

on a

$$U''_1 = \frac{\eta'_3 + \dfrac{jX_{13}}{\eta_1 Z'_2}}{\eta''^2_3 + \left(r_3 + jx_3 + jX_{13}\dfrac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1}\right)\dfrac{1}{\eta''_3 Z'_2}}.$$

On connaît alors facilement

$$I_3 = \frac{U''_1}{\eta''_3 Z'_2} = \frac{\eta'_3 + \dfrac{jX_{13}}{\eta_1 Z'_2}}{\eta''_3{}^2 Z'_2 + r_3 + jx_3 + jX_{13}\dfrac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta'}},$$

$$I''_2 = \eta''_3 I_3 \frac{Z'_2}{Z_2}$$

Pour calculer U, on peut utiliser soit l'équation de départ

$$U = U'_1 + (r_1 + jx_1)\, I_1 + jX_{13}(I_1 - I_3)$$

soit l'expression

$$U = U'_1 \left(\eta_1 + \frac{jX_{13}}{\eta'_3 Z'_2}\right) + Z_1 - jX_{13}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta'_3} I_1,$$

mais cette dernière est peu pratique lorsque η'_3 est petit.

Application. — Cherchons à savoir comment varie la couple de démarrage lorsque r_3 varie, la tension aux bornes E étant constante. Fixons-nous une valeur fixe, arbitraire, de U'_1, que nous prendrons comme origine des phases. On remarque tout de suite que I'_2 est également fixe, indépendant de r_3. Mais, lorsque r_3 varie, l'extrémité du vecteur représentant I''_2 décrit un cercle, et on peut faire correspondre, à ce cercle, une échelle linéaire. Quand aux extrémités des vecteurs représentant I_1 et U, elles décrivent des cercles déduits du précédent par similitude. Nous avons repris un exemple traité par Schuisky [20] ; les données sont :

$\eta_1 = 1$, $\eta_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\delta = 45°$, d'où $\eta'_3 = 0{,}5$, $\eta''_3 = 0{,}5$,

$r_1 = r_2 = 10\Omega$, $x_1 = x_2 = x_3 = 5\Omega$, $X_{13} = 10\Omega$.

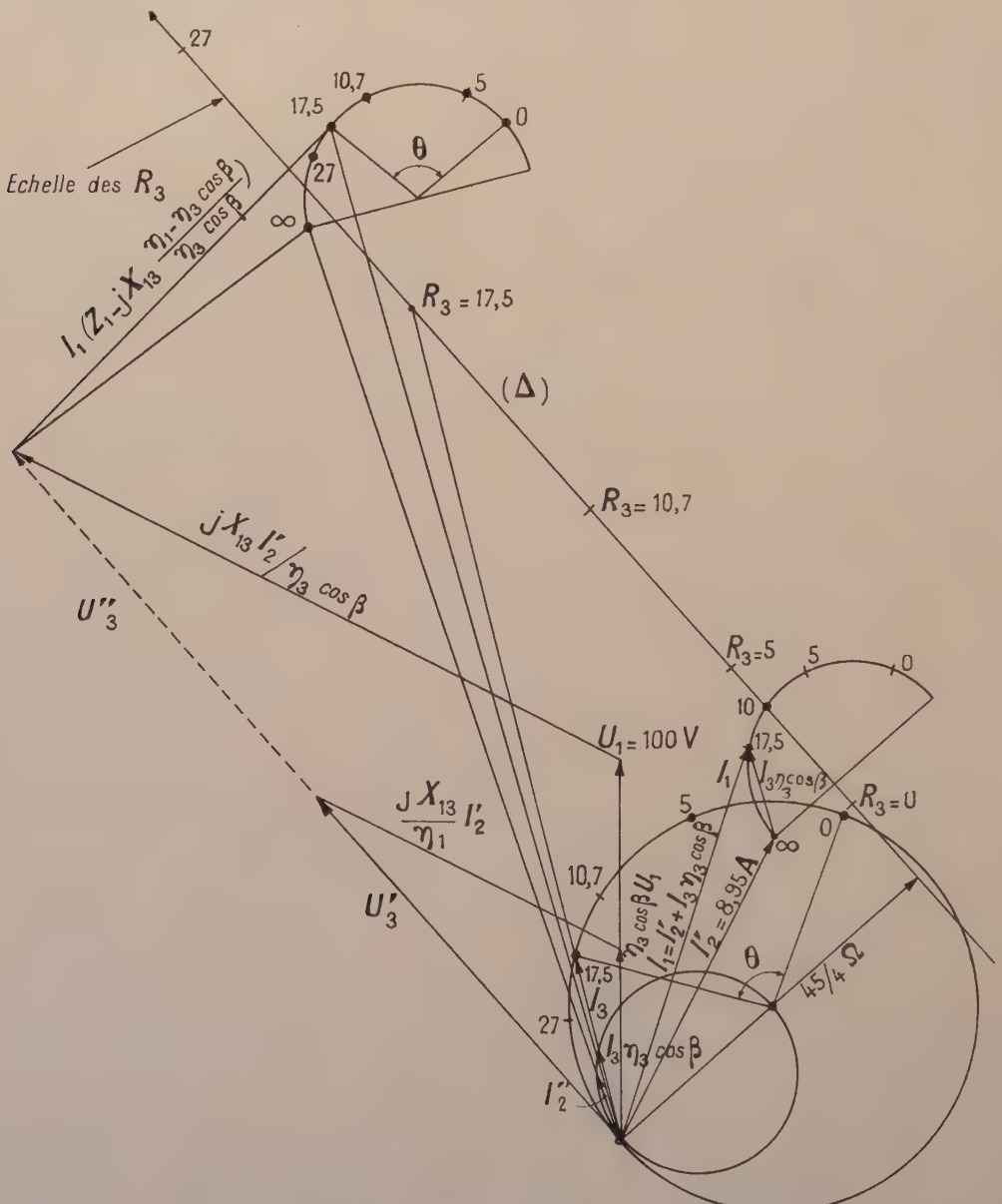

Fig. 27. — Diagramme illustrant le paragraphe III. B (1 cm = 20 V ; 1 cm = 2 A).

Les calculs sont très peu différents, que l'on néglige ou non i'_1 et i''_1. Pour tracer la figure 27, on a pris $X_m = \infty$.

L'ordre des opérations est le suivant :

a) on se fixe U'_1 (ici 100 V) ;

b) on détermine $I'_2 = \dfrac{U'_1}{Z_2}$;

c) on trace le vecteur

$$U'_3 = \eta'_3 U'_1 + \frac{jX_{13}}{\eta_1}(I'_2 + i'_1) ;$$

d) on trace le cercle lieu de l'extrémité du vecteur I_3 ; d'après la relation

$$I_3 = \frac{U'_3}{r_3 + jx_3 + \eta''^2_3 Z'_2 - jX_{13}\dfrac{\eta'_3 - \eta_1}{\eta_1}} .$$

Ce cercle est l'inverse de la droite parallèle au vecteur U'_3 et distante de celui-ci de

$$x_3 + \eta''^2_3 x_2 + X_{13}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1} = \frac{45}{4} \qquad \text{(fig. 27)} .$$

L'échelle des r_3 est linéaire et portée par une parallèle à Δ ou par Δ elle-même ;

e) on trace ensuite le lieu de I_1, qui est un cercle déduit du précédent par similitude ; il est donc inutile de construire une nouvelle échelle linéaire, puisque l'angle θ se conserve ;

f) on place le vecteur

$$U''_3 = \eta_1 U'_1 = \frac{jX_{13}}{\eta_1}(I'_2 + i'_1) ;$$

g) on trace le lieu de l'extrémité du vecteur U,

$$U = U''_3 + I_1\left(Z_1 - jX_{13}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta'_3}\right) .$$

Ce lieu est encore un cercle déduit du lieu de I_3 ; il est encore inutile de tracer une échelle ;

h) On relève, pour chaque valeur de r_3, les courants, le couple $I'_2 \wedge U''_1 - I''_2 \wedge U'_1$ et la tension U. Pour avoir les valeurs qui correspondent à la tension d'alimentation E, on multiplie les courants fictifs par E/U, et le couple par $(E/U)^2$.

A propos de cet exemple, nous ferons une remarque intéressante ; si on néglige le courant magnétisant, le couple est donné par

$$I'_2 \wedge U''_1 - I''_2 \wedge U''_1 = \eta''_3 Z_2 (I'_2 \wedge I_3 - I_3 \wedge I'_2) = 2\eta''_3 Z_2 I'_2 \wedge I_3$$

et il s'annule donc, avec changement de signe, lorsque I'_2 et I_3 sont colinéaires ; ainsi, comme nous l'avons vu plus haut (paragraphe I, B.), le couple peut être dirigé de la partie baguée vers la partie non baguée, et cela se produit lorsque la somme $r_2 + r_3$ est suffisamment faible.

Toujours dans le cas où l'on néglige les courants magnétisants, on peut rapidement localiser la valeur de r_3 pour laquelle le couple de démarrage est maximal ; si le lieu de l'extrémité du vecteur U est assez petit, il suffit de considérer le point où la tangente au cercle I'_3 est parallèle à I'_2.

La figure 28 montre la variation de I_1 et C en fonction de R_3, d'après la figure 27 (traits pleins). On a reporté également les valeurs de C que l'on aurait obtenues pour $X_m = 40\ \Omega$. Les différences ne sont

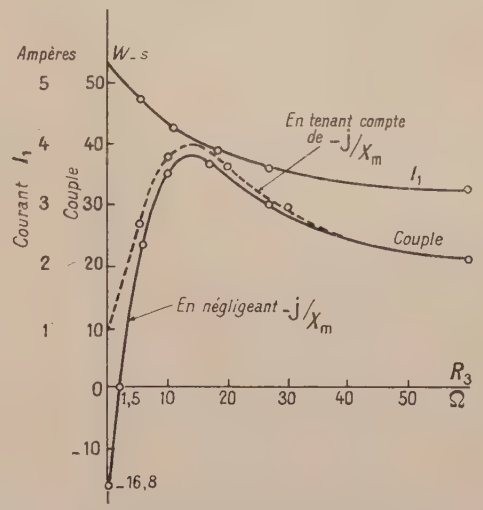

Fig. 28. — Courbes montrant l'influence de R_3 sur le couple et l'appel de courant au démarrage ($X_{13} = 10\ \Omega$).

notables que pour les faibles valeurs de C ; de plus, on voit que C ne prend plus de valeur négative.

C. **Influence de X_{13} sur le couple de démarrage.** — Nous reprendrons une marche analogue. Si nous nous

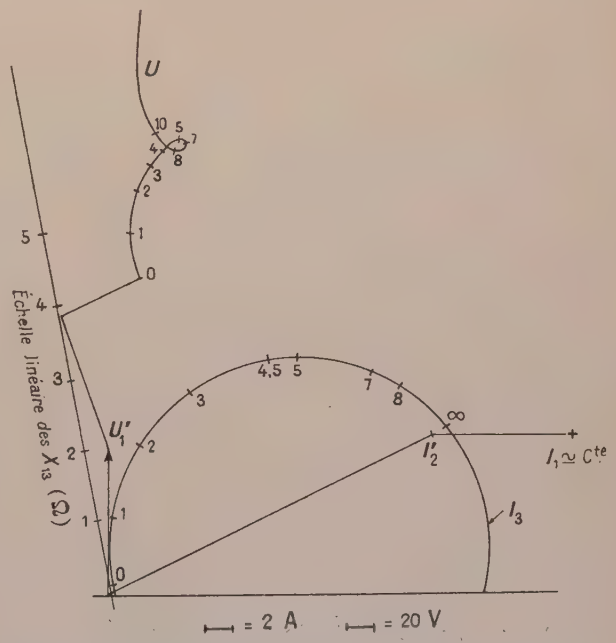

Fig. 29. — Diagramme relatif au démarrage à X_{13} variable d'un moteur monophasé à bobine-écran.

$r_1 + jx_1 = 3 \quad + j\,1{,}7 \quad \eta_1 = 1$
$r_2 + jx_2 = 1{,}74 + j\,3{,}54 \quad \eta'_3 = 0{,}03$
$r_3 + jx_3 = 3{,}8 \quad + j\,1{,}34 \quad \eta''_3 = 0{,}155$
$X_m = 20$

fixons U'_1, le courant I'_2 est également fixé. Le courant I_3 est représenté par un vecteur dont l'extrémité décrit un cercle lorsque X_{13} varie. Ce cercle ne passe pas par l'origine, on peut le construire suivant les méthodes classiques soit par les points 0, ∞ et la tangente au point ∞, soit à l'aide de trois points. Il y a encore une échelle linéaire

$$I_3 = -\frac{\eta'_3 U'_1 + jX_{13}\frac{I'_2}{\eta_1}}{jX_{13}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1} + r_3 + jx_3 + \eta''_3{}^2 Z'_2} = \frac{A + BjX_{13}}{C + DjX_{13}}.$$

On détermine ensuite I_1, qui décrit un cercle déduit du précédent par similitude.

Remarquons que, pour $X_{13} = \infty$,

$$I_3 = \frac{I'_2}{\eta_1 - \eta'_3};$$

or, $$\eta_1 I_1 = I'_2 + i'_1 + \eta'_3 I_3$$

si donc l'on néglige i_1, on aura

$$I_1 - I_3 = 0,$$

ce qui implique que les cercles lieux de I_1 et de I_3 soient tangents en leurs points $X_{13} = \infty$; par suite, les deux diagrammes circulaires sont homothétiques, et leurs échelles linéaires sont confondues.

Étudions maintenant le lieu de l'extrémité du vecteur U. Nous avons vu que

$$U = \eta_1 U'_1 + \delta\frac{X_{13}}{\eta'_3}(I'_2 + i'_1) + I_1\left(Z_1 + j\frac{\eta'_3 - \eta_1}{\eta'_3}X_{13}\right),$$

Nous savons que

$$r_2 I'_2 = \alpha U'_1 + \beta U''_1, \qquad r_2 I''_2 = -\beta U'_1 + \alpha U''_1$$

Donc $$I_3 = \frac{i''_1 + I''_2}{\eta''_3} = \frac{1}{\eta''_3}\left[\frac{U''_1}{jX_m} + \frac{-\beta U'_1 + \alpha U''_1}{r_2}\right]$$

et $$I_1 - I_3 = \frac{\eta'_3 - \eta_1}{\eta_1}\frac{i''_1 + I''_2}{\eta''_3} + \frac{I'_2}{\eta_1} + \frac{i'_1}{\eta_1}$$

$$= \frac{\eta'_3 - \eta_1}{\eta_1\eta''_3}\left(\frac{U''_1}{jX_m} + \frac{-\beta U'_1 + \alpha U''_1}{r_2}\right) + \frac{\alpha U'_1 + \beta U''_1}{\eta_1 r_2} + \frac{U'_1}{jX_m\eta_1}$$

En reportant ces valeurs dans l'équation

$$(r_3 + jx_3)I_3 - \eta'_3 U'_1 - jX_{13}(I_1 - I_3) + \eta''_3 U''_1 = 0,$$

nous obtenons la relation suivante entre U'_1 et U''_1

$$\frac{U''_1}{U'_1} = \frac{\frac{\alpha jX_{13}}{\eta_1} + \beta\left[\frac{r_3 + jx_3}{\eta''_3} + jX_{13}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1\eta''_3}\right] + r_2\left(\eta'_3 + \frac{X_{13}}{\eta_1 X_m}\right)}{\alpha\left[\frac{r_3 + jx_3}{\eta''_3} + jX_{13}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta'_1\eta''_3}\right] - \beta\frac{jX_{13}}{\eta_1} + r_2\left[\frac{r_3 + jx_3}{jX_m\eta''_3} + \frac{X_{13}}{X_m}\frac{\eta_1\eta'_3}{\eta_1\eta''_3} + \eta''_3\right]}.$$

On procédera alors de la manière suivante : après s'être fixé une valeur arbitraire déterminée de U'_1, on en déduira la valeur de U''_1, en fonction de v, à l'aide de la relation ci-dessus ; ceci permettra ensuite de déterminer tous les courants, les couples, et la tension fictive U aux bornes.

Enfin, par une réduction dans le rapport E/U pour les courants, et dans le rapport $(E/U)^2$ pour les couples, on obtiendra les valeurs vraies.

ce qui peut s'écrire

$$U = \eta_1 U'_1 + \frac{Z_1}{\eta_1}(I'_2 + i'_1) + \frac{jX_{13}}{\eta_1}(I'_2 + i'_1) + \left(Z_1\frac{\eta'_3}{\eta_1} - jX_{13}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1}\right)\frac{A + BjX_{13}}{C + DjX_{13}}$$

ou, avec des notations évidentes

$$U = H + \frac{A + BjX_{13})(E - FjX_{13})}{C + DjX_{13}} + GjX_{13}$$

$$= H + \frac{X^2_{13}(BF - DG) + X_{13}\dots}{C + DjX_{13}}$$

or,

$$BF - DG = \frac{I'_2}{\eta_1}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1} - \frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1}\frac{I_2 + i'_1}{\eta_1} = -\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1{}^2}i'_1.$$

Donc, l'extrémité du vecteur U décrit un diagramme circulaire à échelle linéaire si l'on néglige i'_1. Dans le cas contraire, on a, pour X_{13} très grand

$$U \# \eta_1 U'_1 + Z_1\frac{I'_2 + i'_1}{\eta_1} + jX_{13}i'_1.$$

La figure 29 donne un exemple d'application, lorsque l'on tient compte de i'_1.

IV. Étude des caractéristiques en charge du moteur monophasé à bobine-écran idéal. Première méthode. — **A. Courbe du couple en fonction de la vitesse.** — Si nous connaissions U'_1 et U''_1, nous pourrions, à l'aide des coefficients α et β [1], déterminer I'_2 et I''_2, puis toutes les autres valeurs des tensions et courants.

Pratiquement, la relation ci-dessus s'écrira

$$\frac{U''_1}{U'_1} = \frac{N}{D} = \frac{\mathcal{R}(N) + j\mathrm{J}(N)}{\mathcal{R}(D) + j\mathrm{J}(D)}$$

avec

$$\mathcal{R}(N) = v^2\left[t\frac{X_{13}}{\eta_1} + t^2 r_2\left(\eta'_1 + \frac{X_{13}}{\eta_1 X_m}\right)\right] - v\left(\frac{x_3}{\eta''_3} + X_{13}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1\eta_3}\right) - \frac{tX_{13}}{\eta_1} + (1-t^2)r_2\left(\eta'_3 + \frac{X_{13}}{\eta_1 X_m}\right)$$

$$\mathrm{J}(N) = \frac{r_3}{\eta''_3} + \frac{tX_{13}}{\eta_1} + 2tr_2\left(\eta'_3 + \frac{X_{13}}{\eta_1 X_m}\right)$$

$$\mathcal{R}(D) = v^2\left[\frac{tx_3}{\eta''_3} + tX_{13}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1\eta''_3} + r_2 t^2\left(\eta''_3 + \frac{X_{13}}{X_m}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1\eta''} + \frac{x_3}{\eta''_3 X_m}\right)\right]$$
$$+ \frac{U}{\eta_1}X_{13} + \frac{r_3}{\eta''_3} - \frac{tx_3}{\eta''_3} - t\frac{X_{13}}{\eta_1}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1\eta''_3} + r_2(1-t^2)\left(\eta''_3 + \frac{X_{13}}{X_m}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1\eta''_3} + \frac{x_3}{\eta''_3 X_m}\right) + \frac{2tr_2r_3}{\eta''_3 X_m}$$

$$\mathrm{J}(D) = -v^2\left(\frac{tr_3}{\eta''_3} + \frac{r_2 r_3 t^2}{\eta''_3 X_m}\right) + \frac{x_3}{\eta''_3} + X_{13}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1\eta''_3} + r_3\frac{t}{\eta''_3} - \frac{r_2 r_3(1-t^2)}{\eta''_3 X_m} + 2tr_2\left(\eta''_3 + \frac{X_{13}}{X_m}\frac{\eta_1 - \eta'_3}{\eta_1\eta''_3} + \frac{x_3}{\eta''_3 X_m}\right).$$

Par exemple, pour l'exemple que nous avons donné plus haut,

$r_1 = r_2 = 10$, $x_1 = x_2 = 5$, $X_{13} = 10$, $X_m = 40$, $r_3 = 20$,

il vient

$$\frac{U''_1}{U'_1} = \frac{68{,}75v^2 - 200v + 6{,}25 + \mathrm{j}(175 + 400v)}{125v^2 - 100v + 475 + \mathrm{j}[-225v^2 + 425]}.$$

Le lieu de l'extrémité du vecteur U''_1 est une quartique ne possédant pas de point à l'infini. Le tracé point par point pourrait être long, et très sujet à erreur parce que cette courbe possède des arcs où la courbure est faible et varie lentement, et des arcs où la courbure est forte et varie rapidement. On arrive à avoir une bonne précision et un grand nombre de points en conduisant le calcul de la manière suivante : traçons, en fonction de v, les courbes de $\mathcal{R}(N)$, $\mathcal{R}(D)$, $\mathrm{J}(N)$, $\mathrm{J}(D)$; ces courbes sont très simples, puisque ce sont trois paraboles et une droite.

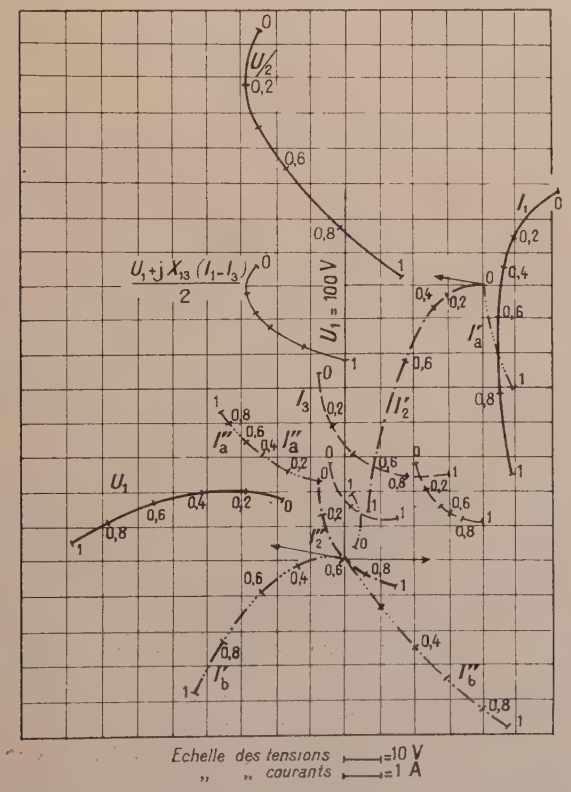

Fig. 30. — Diagramme en charge (v variant de 0 à 1) pour $U'_1 = 100$ V = Cte.

Nous pouvons ensuite tracer les courbes des modules de N et D, soient $\mathrm{M}(N)$ et $\mathrm{M}(D)$, ainsi que $\theta(N) = \arg(N)$ et $\theta(D) = \arg(D)$, données par les relations

$$\mathrm{M}^2(N) = \mathcal{R}^2(N) + \mathrm{J}^2(N), \qquad \mathrm{M}^2(D) = \mathcal{R}^2(D) + \mathrm{J}^2(D),$$

$$\theta(N) = \text{arc tg}\frac{\mathcal{R}(N)}{\mathrm{J}(N)}, \qquad \theta(D) = \text{arc tg}\frac{\mathcal{R}(D)}{\mathrm{J}(D)}.$$

Plus simplement, on peut construire $\mathrm{M}(N)$ et $\mathrm{M}(D)$ directement, sur le graphique, à l'aide d'un compas à pointes sèches.

On remarquera que, si pour une certaine valeur de v, $\mathrm{R}(N)$ s'annule, les courbes $\mathrm{M}(N)$ et $\mathrm{J}(N)$ sont tangentes. On notera également que, sur l'exemple choisi, $\theta(N)$ varie très vite pour $-0{,}5 < v < 0$, mais on obtient autant de points intermédiaires que l'on veut en faisant le rapport des valeurs de $\mathrm{R}(N)$ et $\mathrm{J}(N)$ lues sur le graphique. Il ne reste plus qu'à tracer les courbes de

$$\left|\frac{U''_1}{U'_1}\right| = \frac{\mathrm{M}(N)}{\mathrm{M}(D)} \quad \text{et d'argument} \quad \left(\frac{U''_1}{U'_1}\right) = \theta(N) - \theta(D),$$

ce qui permet le tracé, point par point, de la quartique bicirculaire.

On a montré le détail des calculs pour l'exemple numérique donné. La figure 30 montre la variation des courants et des tensions pour $U'_1 = 100$ V = Cte, lorsque v varie ; on a posé

$$I'_2 = \frac{1}{r_2}[\alpha U'_1 + \beta U''_1] = I'_a + I'_b,$$

$$I''_2 = \frac{1}{r_2}[-\beta U'_1 + \alpha U''_1] = -I''_b + I''_a$$

et on a ensuite suivi la marche suivante

$$\eta''_3 I_3 = I''_2 + i''_1,$$
$$\eta_1 I_1 = I'_2 + i'_1 - \eta'_3 I_3,$$
$$U = (r_1 + \mathrm{j}x_1)I_1 + \eta_1 U'_1 + \mathrm{j}X_{12}(I_1 - I_3)$$

Les valeurs relevées sur la figure sont indiquées dans le tableau I.

TABLEAU I. — *Valeurs fictives et valeurs réelles.*

	Valeurs fictives								Valeurs réelles (**)		
v	I_1 A	U V	i''_2(*) A	U''_1 V	i'_2(*) A	$I''_2 \wedge U'_1$ W	$I'_2 \wedge U''_1$ W	Couple W—s	I_1 A	I_2 A	Couple W—s
0	5,5	311	— 0,8	27	8,6	— 80	232	312	4	1,77	32,2
0,2	3,8	278	— 0,6	36	8,3	— 60	300	360	3,84	1,37	46,5
0,6	2,9	230	0	56,5	6,1	0	380	380	3,6	1,26	72
0,8	3	196,5	0,6	70	3,8	60	250	190	3,33	1,52	49,5
1	3,9	172	1,4	78	1,3	140	100	— 40	3,14	2,3	— 13,5

Nous ajouterons les remarques suivantes :

Remarque I. — La relation entre i''_1 et i'_1 est la même qu'entre U''_1 et U'_1. On peut donc supprimer une courbe de la figure 30, en se fixant i'_1 et en faisant la construction à partir de cette grandeur. Par contre, on complique l'évaluation du couple.

Remarque II. — Le rapport U''_1/U'_1 peut se mettre sous la forme

$$\frac{U''_1}{U'_1} = \frac{Av^2 + Bv + C}{A'v^2 + B'v + C'} = \frac{Av^2_1 + Bv + C}{A'(v - v_1)(v - v_2)},$$

où A, B, C, A', B', C' sont des nombres complexes, et v_1 et v_2 les racines de l'équation $A'v^2 + B'v + C = 0$. D'après un théorème relatif aux fractions rationnelles, on peut écrire

$$\frac{U''_1}{U'_1} = \frac{A}{A'} + \frac{M_1}{v - v_1} + \frac{M}{v - v_2}$$

et on pourra obtenir U''_1 comme la somme de trois tensions dont l'une est constante et les deux autres données par des diagrammes du cercle à échelle linéaires par rapport à v.

Remarque III. — Nous pouvons également mettre U''_1/U'_1 sous la forme

$$\frac{U''_1}{U'_1} = \frac{A}{A'} \frac{(v - v_3)(v - v_4)}{(v - v_1)(v - v_2)}$$

et remarquer que le principe de la méthode n'est pas modifié si U'_1 est variable puisque nous cherchons seulement les rapports des courants et tensions lorsque v varie. Prenons donc une tension arbitraire u et posons

$$U'_1 = A' \frac{v - v_2}{v - v_4} u, \qquad U''_1 = A \frac{v - v_3}{v - v_1} u;$$

U'_1 et U''_1 sont tous deux représentés sur des diagrammes à échelles linéaires et on peut continuer la construction comme dans les méthodes précédentes.

Remarque IV. — La figure 31 montre les variations de C, la figure 32 les variations de I_1, I_3 et P (P = puissance absorbée), ainsi que du rendement η, lorsque v varie de 0 à 1. [$\eta = Cv/P$, C (puissance synchrone) étant exprimé en watts-secondes et P en watts]. On n'a pas tracé ces courbes pour $-1 < v < 0$, car elles n'ont pas d'intérêt pour l'utilisateur.

Cependant, le calcul que nous venons de faire, et l'expérience, montrent que la courbe C en fonction de v

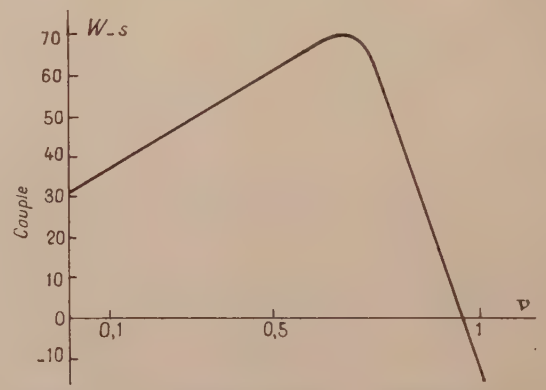

Fig. 31. — Courbe du couple C en fonction de v.

présente l'allure indiquée sur la figure 33c. Cette allure est intermédiaire entre les allures des figures 33a (moteurs polyphasés) et 33b (moteurs monophasés).

La longueur OA, tout comme la longueur OB, caractérise l'équilibrage réalisé au moyen de la bobine-écran.

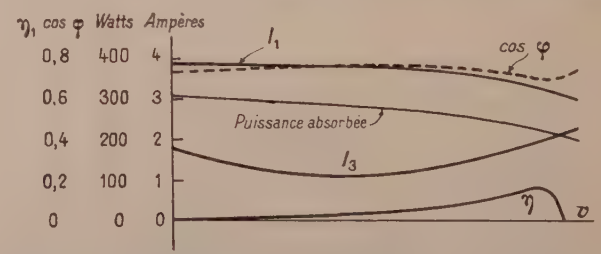

Fig. 32. — Courbes de I_1, I_3 et P (puissance absorbée) et du rendement η en fonction de v.

Cette remarque est valable pour tous les moteurs à phase auxiliaire.

B. Influence de r_3 et X_{13} sur le fonctionnement en charge. — Pour qu'un moteur soit satisfaisant, il faut que son échauffement soit suffisamment faible

(*) i''_2 : projection de I''_2 sur la normale à U'_1
i'_2 : projection de I'_2 sur la normale à U''_1.
(**) Tension aux bornes : 100 V.

afin que l'isolant ne soit pas en danger. En général, il suffit de faire la vérification en charge ; la diminu-

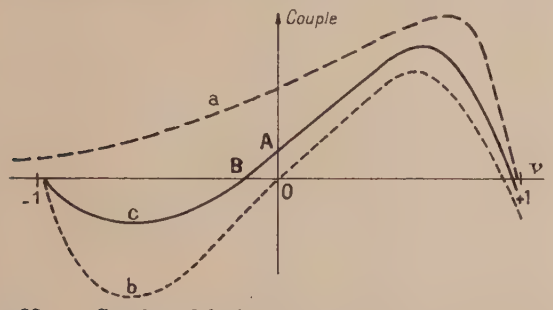

Fig. 33. — Courbes théoriques du couple en fonction de la vitesse : a), cas d'un moteur polyphasé ; b), cas d'un moteur monophasé ; c) cas d'un moteur à bobines-écrans.

tion des pertes et de l'échauffement correspond alors à une augmentation du rendement. Or, si nous nous reportons à la figure 32, nous constatons que le cou-

$$\eta_1 I_1 = i'_1 + I'_2 + \eta'_3 I_3,$$

$$\eta''_3 I_3 = i''_1 + I''_2,$$

$$\eta'_3 I_3 = \frac{U'_1}{jX_m} + \frac{-\beta U'_1 + \alpha U''_1}{r_2},$$

de même on a

$$\eta_1 I_1 = \frac{U'_1}{jX_m} + \frac{\alpha U'_1 + \beta U''_1}{r_2} + \eta'_3 \left[-\frac{\beta U'_1}{\eta''_3 r_2} + \frac{U''_1}{\eta''_3} \left(\frac{\alpha}{r_2} - \frac{j}{X_m} \right) \right]$$

d'où

$$I_1 = \frac{U'_1}{\eta_1} \left[\frac{\alpha\eta''_3 - \beta\eta'_3}{\eta''_3 r_2} - \frac{j}{X_m} \right] + \frac{U''_1}{\eta_1} \left[\frac{\alpha\eta'_3 + \beta\eta''_3}{r_2} - \frac{j\eta'_3}{\eta''_3 X_m} \right]$$

et enfin on peut voir que

$$U = U'_1 + (r_1 + jx_1)I_1 + jX_{13}(I_1 - I_3)$$

est lié par une relation homographique à U'_1 ; cependant, nous verrons par la suite qu'il est inutile d'expliciter cette relation. Pratiquement, on commencera par tracer le cercle U''_1 par trois de ses points (0,20 ∞ sur la figure 34), ce qui est plus commode, que d'employer les points 0 et ∞, et la tangente au point $r_3 = \infty$. Puis on en déduit, par le calcul, les cercles I_1 et I_3 ; pour ce dernier, on doit vérifier que le point ∞ se place à l'origine. D'après les relations ci-dessus, l'angle θ se conserve, puisque chaque cercle se déduit du cercle U''_1 par similitude.

Tableau II. — *Valeurs utilisées pour le tracé des courbes de la figure* 35.

r_3	I_1(lu)	I_3(lu)	I_1	I_3	U
0	10,4	12	6,05	7	171
7,5	7,3	7,5	4,23	4,27	172
20	5,5	3,9	3,2	2,3	173
∞	4,55	0	2,55	0	176,5

Pour déterminer U, on peut expliciter la relation $U = AU'_1 + BU''_1$, où A et B sont des nombres indépendants de r_3, et déduire le cercle U comme les deux

rant I_3 croît lorsque l'on passe de la marche en charge (que nous supposerons correspondre à $v = 0{,}85$), à la marche à vide ($v \simeq 1$). L'accroissement des pertes par effet Joule $r_3 I^2_3$ peut, si l'on n'y fait pas attention, devenir considérable. On a par exemple constaté qu'un certain moteur, qui donnait toute satisfaction en charge, s'échauffait à vide à un tel point que la soudure qui fermait la bobine-écran fondait.

Dans ce qui suit, nous allons étudier les variations de I_1 et de I_3 à vide, lorsqu'on fait varier r_3. Nous étendrons ensuite le raisonnement à des problèmes similaires.

Considérons la formule de la page 650 où α et β ne dépendent que des caractéristiques du rotor et de v. U''_1 et U'_1 sont liés par une relation homographique en r_3. Si donc on suppose U'_1 constant, U''_1 peut être représenté à l'aide d'un diagramme du cercle à échelle linéaire lorsque v est fixe et r_3 variable.

Montrons qu'il en est de même pour I_1, I_3 et U ; nous avons en effet

$$I'_2 = \frac{1}{r_2}(\alpha U'_1 + \beta U''_1),$$

$$I''_2 = \frac{1}{r_2}(-\beta U'_1 + \alpha U''_1),$$

$$I_3 = \frac{-\beta U'_1}{\eta''_3 r_2} + \frac{v''_1}{\eta''_3}\left(\frac{\alpha}{r_2} - \frac{j}{X_m}\right);$$

précédents. Il est cependant plus rapide de déterminer le cercle $U'_1 + (r_1 + jx_1)I_1$; sur celui-ci on choisit trois points et on détermine les valeurs de $jX_{13}(I_1 - I_3)$

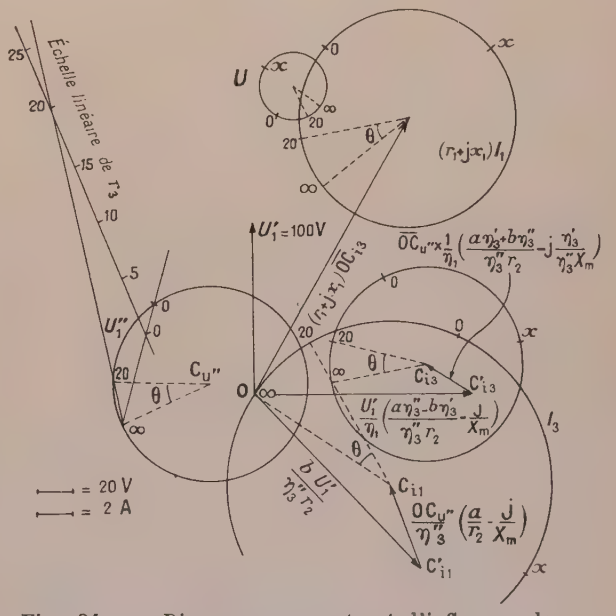

Fig. 34. — Diagrammes montrant l'influence de r_3 sur le fonctionnement à vide.

qui correspondent à chacun d'eux. Dans le cas de la figure 34, on a fait cette opération à l'aide des points 0, ∞, et x, ce dernier n'ayant qu'une signification mathématique (il correspondrait à $r_3 = -8\Omega$), mais présentant l'avantage d'être suffisamment éloigné des points 0 et ∞.

On trace ainsi les courbes de la figure 35 en utilisant le tableau II.

Pour la courbe de $Q_3 = r_3 I^2_3 = f(r_3)$, on a pris des points intermédiaires à l'aide de la courbe $I_3(r_3)$.

On remarquera que sur la figure 34, U varie très peu,

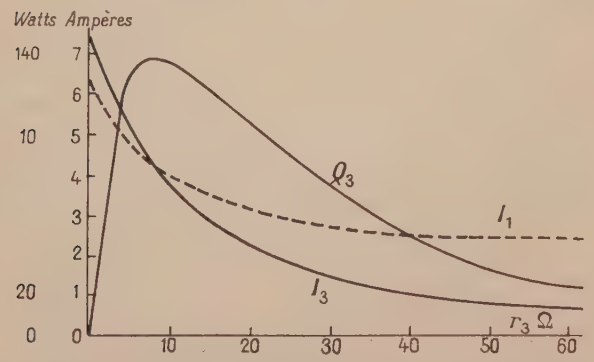

Fig. 35. — Courbes déduites du diagramme de la figure 34 : variations, en fonction de r_3, de I_2 (courant primaire), I_3 (courant dans la bobine-écran) ; Q_3, pertes par effet Joule dans la bobine-écran. (Tension aux bornes du primaire 100 V.)

ce qui fait que l'on peut presque considérer cette figure comme établie à $U = \text{Cte}$.

Le raisonnement précédent s'étend très facilement aux variations des courants à vide en fonction de X_{13} et de X_m.

Pour l'étude du fonctionnement à $v \simeq 1$, il n'y a aucune difficulté supplémentaire. Il est possible dans ce cas de faire apparaître les courants I'_2 et I''_2, dont les variations sont représentables à l'aide de cercles semblables aux précédents, et de calculer les couples dans chaque cas particulier.

V. Étude des caractéristiques en charge du moteur monophasé à bobine-écran idéal. Deuxième méthode. — Supposons que, le moteur tournant à la vitesse angulaire $v\omega/p$, nous ouvrions le circuit de la bobine-écran, et que nous lui appliquions une tension auxiliaire U'_{3a} telle que le flux dans l'axe transverse s'annule. En se fixant arbitrairement U'_1, on se fixe $I'_2 = \alpha U'_1/r_2$, $I''_2 = -\beta U'_1/r_2$

$$I_3 = -\frac{\beta U'_1}{\eta''_3 r_2}, \qquad I_1 = I'_2 - \frac{jU'_1}{X_m},$$

ce qui permet de calculer la valeur à donner à U'_{3a}

$$U'_{3a} = jX_{13}(I_1 - I_3) + \eta'_3 U'_1 - (r_3 + jX_3)I_3.$$

On pourrait également chercher une valeur U''_{3a} de cette tension auxiliaire, telle que $U'_1 = 0$; en se fixant arbitrairement U''_1, on se fixe U''_{3a}. Un état réel de fonctionnement correspond à la superposition de deux des régimes fictifs précédents, choisis de telle manière que

$$U'_{3a} + U''_{3a} = 0.$$

Cette méthode est plus rapide que la précédente, et elle est aussi précise ; elle peut servir à tracer les diagrammes du cercle dont nous avons parlé précédemment, puisqu'elle peut permettre de trouver trois points de ces diagrammes. Par contre, son exposé ne donne pas lieu naturellement aux considérations du paragraphe IV. B., et c'est la raison pour laquelle nous l'avons exposée en second lieu.

VI. Introduction des harmoniques de répartition du champ. — **A. Principe.** — Nous avons supposé, p. 647 et figure 26c, que chacun des deux enroulements pouvait être considéré comme réparti sinusoïdalement. En fait, des courbes de répartition du champ telles que celles de la figure 26b sont très riches en harmoniques. Nous avons vu qu'un enroulement réel est équivalent à une infinité d'enroulements répartis sinusoïdalement, placés en série le long de l'entrefer. Or, les travaux de Bojer permettent de dire qu'il suffit de considérer les trois ou quatre premiers harmoniques. On disposera ceux-ci comme il est indiqué en figure 36a, où les moteurs idéaux de polarité 1, 3 et 5, ont des

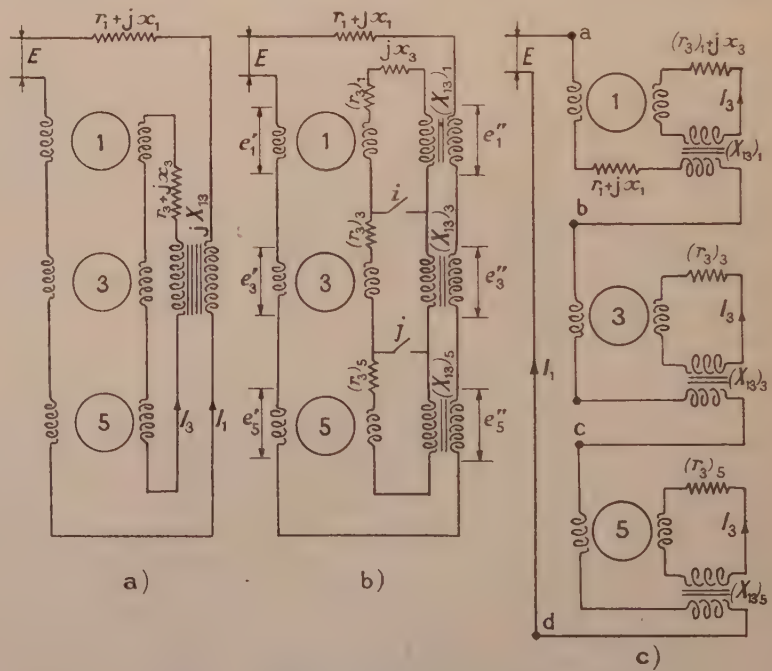

Fig. 36. — Schémas relatifs à la décomposition en moteurs harmoniques.

rotors électriquement indépendants, mais calés sur le même arbre.

Cette décomposition en moteurs harmoniques s'appuie sur les propositions suivantes :

a) deux enroulements ne peuvent avoir de mutuelle-inductance que s'ils sont de même polarité ;

b) la réaction du rotor à un champ d'excitation sinusoïdal est toujours de même polarité que ce champ d'excitation ;

c) les pertes par effet Joule dans le rotor, dues aux différents harmoniques sont additives. On peut établir facilement ceci en se servant de la théorie des deux champs tournant ;

d) les harmoniques de la courbe de répartition du champ du rotor (1) sont de polarité au moins égale à $q \pm p$; par exemple, si l'on tient compte des quatre premiers harmoniques (1, 3, 5, 7), le rotor du moteur harmonique 1 ne crée pas de champ de polarité $7p$, si le nombre de barres par paire de pôles est supérieur à 5, ce qui est pratiquement toujours le cas. Si ceci n'était pas réalisé, on retrouverait les phénomènes décrits par Dreese pour les moteurs polyphasés.

Ceci étant, on passera de la figure 36a à la figure 36b en divisant r_3 et X_{13} en trois parties

$$(r_3)_1 + (r_3)_3 + (r_3)_5 = r_3,$$
$$(X_{13})_1 + (X_{13})_3 + (X_{13})_5 = X_{13}.$$

Si cette division est opérée de telle manière que les tensions aux bornes des interrupteurs i et j soient nulles, la figure 36b est équivalente à la figure 36c, représentant trois moteurs mis en série par leurs primaires, et dans les bobines-écrans desquels circule le même courant (en intensité et en phase). La tension entre a et b est égale à $e_1 = e'_1 + e''_1$, celle entre b et c à

$$e_3 = e'_3 + e''_3 \ \ldots \text{ etc.}$$

$$U'_1 = X_m \frac{\{r_2(X_m + 2x_2) - j[r_2^2 - x_2(1 - v^2)(X_m + x_2)]\}d' - jvr^2_2 d''}{-r_2^2 + (1 - v^2)(X_m + x_2)^2 - 2jr_2(X_m + x_2)}$$

$$U''_1 = X_m \frac{jvr^2_2 d' + \{r_2(X_m + 2x_2) + j(r_2^2 - (1 - v^2)(X_m + x_2)x_2]\}d''}{-r_2^2 + (1 - v')(X_m + x_2)^2 - 2jr_2(X_m + x_1)}$$

ce qui se réduit bien, pour $v = 0$, à

$$\frac{U'_1}{d'} = \frac{U''_1}{d''} = j\frac{X_m(r_2 + jx_2)}{r_2 + j(X_m + x_2)}.$$

La connaissance de U'_1 et U''_1 entraîne celle de I'_2 et I''_2, donc celle des couples.

(1) Voir page 13.

On opérera alors de la manière suivante : à une vitesse donnée, on étudiera l'influence des variations de r_3 et de X_{13} sur les courants I_1 et I_3, pour chacun des trois moteurs ; puis on cherchera, par tâtonnement, à réaliser les trois conditions suivantes :

a) même rapport complexe I_1/I_3 pour les trois moteurs ;

b) sommes $(r_3)_1 + (r_3)_3 + (r_3)_5$ et $(X_{13})_1 + (X_{13})_3 + (X_{13})_5$ égales à la résistance réelle et à la mutuelle inductance réelle du moteur.

On additionnera ensuite vectoriellement les trois tensions u_1, u_3, u_5 (valeur fictives de e_1, e_3 et e_5), et on trouvera une valeur fictive U de la tension E. Il reste à effectuer la réduction des courants dans le rapport E/U, et des couples dans le rapport $(E/U)^2$.

B. **Mise en équation.** — Le problème consiste maintenant à trouver les courants I'_2 et I''_2, ainsi que les tensions U'_1 et U''_1, lorsque l'on s'est fixé I_1 et I_3.

Reprenons le système d'équations

$$(r_2 + jx_2)I'_2 - vx_2 I''_2 = U'_1 + jvU''_1,$$
$$vx_2 I'_2 + (r_2 + jx_2)I''_2 = -jvU'_1 + U''_1,$$
$$I'_2 = \eta_1 I_1 - \eta'_3 I_3 - U'_1/jX_m,$$
$$I''_2 = \eta''_3 I_3 - U''_1/jX_m$$

et calculons U'_1 et U''_1 en fonction de

$$\eta_1 I_1 - \eta'_3 I_3 = d' \quad \text{et} \quad \eta''_3 I_3 = d''.$$

Tous calculs faits, on obtient

La pratique montre que l'introduction des harmoniques dans le calcul ne modifie pas sensiblement les rapports complexes V'_1/I_1 et I_1/I_3. Il en résulte que le calcul par approximations successives aboutit, avec précision, dès le deuxième essai.

On met très bien en évidence, par cette méthode, le trou de couple qui se produit au tiers du synchronisme sur la plupart des moteurs de forte puissance à bobines-écrans.

TROISIÈME PARTIE : Les moteurs à induction à cage d'écureuil à entrefer non constant.

I. Introduction. — Nous avons examiné, dans les deux premières parties, la théorie des moteurs à induction à entrefer constant. Or, les moteurs à bobines écrans présentent presque toujours un entrefer irrégulier, et les méthodes précédentes ne s'appliquent plus. En effet, remplaçons un enroulement réel par une série d'enroulements sinusoïdaux créant la même force magnétomotrice que lui.

Soit alors

$$\frac{1}{e} = p_0 + \sum p_{2k} \cos (2k\theta + \varphi_k)$$

la perméance de l'entrefer à l'abscisse angulaire θ. D'après la formule

$$db = -\frac{\mu_0 ni}{e} d\theta$$

on voit que chaque enroulement de la série donne naissance à des champs d'induction de tous ordres.

Nous sommes donc amené à chercher une mise en équation plus directe, et nous essaierons de nous aider des résultats que nous avons exposés dans notre premier article. Tout d'abord, nous rappellerons qu'il n'a été possible d'établir les équations du moteur monophasé à cage que parce que nous avions réussi à définir une inductance cyclique des cadres de la cage d'écureuil ; nous tâcherons donc d'abord de savoir dans quelle mesure il est possible de généraliser ce résultat. Ensuite, nous devons rappeller que, dans la première partie, à un champ d'excitation primaire $b_1 \cos p\theta \cos \omega t$, nous avions fait correspondre des courants dans les cadres de la cage d'écureuil de la forme

$$i_1 \sin p\theta \cos (\omega t - \varphi_1) + i_2 \cos p\theta \cos (\omega t - \varphi_2).$$

Dans cette nouvelle étude, nous pourrons donc chercher, à un champ d'excitation $B_1(\theta) \cos \omega t$, un courant correspondant dans les cadres de la cage d'écureuil

$$S(\theta) \sin \omega t + C(\theta) \cos \omega t.$$

$B_1(\theta)$ est une fonction périodiquede période $2\pi/p$ et de valeur moyenne réelle nulle, tout comme $b_1 \cos p\theta$. On sera donc tenté de chercher $S(\theta)$ et $C(\theta)$ sous la forme de fonctions également périodiques de périodes $2\pi/p$ et de valeurs moyennes nulles, et ne comportant que des termes d'ordre impair.

II. Inductance cyclique des cadres d'une cage d'écureuil. — Considérons les cadres formés par deux barres consécutives et les portions d'anneaux qui les réunissent. Numérotons ces cadres de 1 à q, et appelons a_k l'abscisse angulaire du centre du k^e cadre

$$a_k = a_1 + 2\pi \frac{k-1}{q}$$

Supposons qu'il circule dans les cadres un système de courants j_k, et calculons le flux total qui traverse le k^e cadre. Pour cela, il suffit de remarquer que la perméance de la portion d'entrefer située à l'intérieur du k^e cadre est une fonction $Q(a_k)$, et que l'on peut désigner la perméance de la portion extérieure par $Q_T - Q(a_k)$, Q_T étant une constante égale à la perméance de la totalité de l'entrefer. Comme l'entrefer est le même sous tous les pôles, $Q(a_k)$ est une fonction de période π/p ; de plus, c'est évidemment une fonction toujours positive, donc de valeur moyenne non nulle.

La perméance totale offerte au passage du flux créé par j_k est

$$\frac{1}{\frac{1}{Q(a_k)} + \frac{1}{Q_T - Q(a_k)}} = Q(a_k)\left[1 - \frac{Q(a_k)}{Q_T}\right]$$

donc le flux total créé par j_k à l'intérieur du k^e cadre est

$$\varphi'_k = j_k Q(a_k)\left[1 - \frac{Q(a_k)}{Q_T}\right].$$

De même, le flux total créé par le courant $j_{k'}$ à travers le k^e cadre est

$$\varphi'_{k'} = j_{k'} Q(a_{k'})\left[1 - \frac{Q(a_{k'})}{Q_T}\right].$$

Comme le k^e cadre est tout entier situé à l'extérieur

du k'^{e} cadre, la fraction de $\varphi'_{k'}$ qui traverse le k^{e} cadre est

$$\frac{Q(a_k)}{Q_T - Q(a_{k'})}\varphi'_{k'},$$

soit $$\varphi_{kk'} = -j_{k'}\frac{Q(a_{k'})Q(a_k)}{Q_T};$$

le signe — provient du fait que l'on compte positivement les inductions à l'intérieur d'un cadre parcouru par un courant positif.

Le flux total traversant le k^{e} cadre est donc

$$\varphi_k = j_k Q(a_k)\left[1 - \frac{Q(a_k)}{Q_T}\right] - \frac{Q(a_k)}{Q_T}\sum_{k'\neq k} j_{k'}Q(a_{k'}).$$

Pour simplifier cette expression, on se référera aux considérations du paragraphe précédent ; si j_k peut se mettre sous la forme

$$j_k = C(\theta_k)\cos\omega t + S(\theta_k)\sin\omega t$$

(ce qui reste à vérifier), on a alors la relation

$$\sum_{k=1}^{q} j_k Q(a_k) = 0$$

puisque $j_k Q(a_k)$ serait, à tout instant, une fonction périodique de valeur moyenne nulle, et puisque les a_k forment une suite de q arcs en progression arithmétique de raison $2\pi/q$. φ_k prend alors la forme

$$\varphi_k = j_k Q(a_k)$$

et il est remarquable de constater que ce résultat est identique à celui du paragraphe V.C. de la première partie (1).

La circulation du courant j_k créé également un champ magnétique à l'intérieur des conducteurs qui constituent le cadre ; si l est l'inductance propre correspondante, l'inductance propre cyclique totale du cadre dont le centre est situé à l'abscisse a_k est

$$L(a_k) = l + Q(a_k).$$

III. Équation du courant dans un cadre pour un cas particulier. — **A. Établissement.** — La mutuelle inductance entre le k^{e} cadre et l'enroulement primaire est une fonction périodique de a_k : $M(a_k)$, de période $2\pi/p$ et de valeur moyenne nulle. Nous supposerons en outre que le courant primaire est de la forme

$$i = I_m \cos\omega t.$$

Si on appelle R_a et l_a la résistance et l'inductance d'une portion d'anneau, R_b et l_b la résistance et l'inductance d'une barre de la cage, le courant j_k répondra, compte tenu des couplages dus aux barreaux, à l'équation

$$-R_b j_{k-1} + 2(R_a + R_b)j_k - R_b j_{k+1} - l_b\frac{d}{dt}(j_{k+1} + j_{k-1}) + \frac{d}{dt}(L_k j_k) + \frac{d}{dt}(M_k i) = 0.$$

Dans cette équation

$$j_k = j(a_k, t),$$
$$j_{k-1} = j(a_k - 2\pi\frac{k-1}{q}, t),$$
$$j_{k+1} = j(a_k + 2\pi\frac{k-1}{q}, t).$$

Afin de réduire provisoirement la difficulté, nous allons nous limiter au cas tout à fait particulier où les cadres seraient isolés, de manière à faire disparaître les termes de couplage.

En supprimant les indices k et en remplaçant a_k par θ, le courant $j_k = j$ est donné par l'équation

$$Rj + \frac{d}{dt}(Lj) = -\frac{d}{dt}(Mi_1)$$

où $R = C^{te}$.

B. Forme de la solution et justification des hypothèses de départ. — Pendant le régime permanent, on a

$$\theta = a_k = a_0 + 2\pi\frac{k-1}{a} + \frac{v\omega t}{p},$$
$$\frac{da_k}{dt} = \theta' = \frac{v\omega}{p};$$

L et M sont des fonctions du temps par l'intermédiaire de $\theta = a_k$.

On peut donc écrire l'équation ci-dessus sous la forme

$$\left(r + \frac{dL}{dt}\right)j + L\frac{\partial}{\partial t}j + \frac{d(Mi)}{dt} = 0$$

et poser $$r + \frac{dL}{dt} = R.$$

Les équations linéaires du premier ordre sont classiques ; la solution permanente de celle qui nous intéresse est

$$j = -\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\frac{R}{L}dt\right]\int_{t_0}^{t}\frac{1}{L}\frac{d(Mi)}{dt}\exp\left[\int_{t_0}^{t}\frac{R}{L}dt\right]dt$$
$$= -\frac{Mi}{L} + \exp\left[-\int_{t_0}^{t}\frac{R}{L}dt\right]\int_{t_0}^{t}\frac{rMi}{L^2}\exp\left[\int^{t}\frac{R}{L}dt\right]dt.$$

Faisons le changement de variable $\theta - \theta_0 = \frac{v\omega}{p}(t - t_0)$, il vient

$$j = -\frac{Mi}{L} + \frac{1}{v}\exp\left[-\frac{1}{v}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{R}{\omega L(\theta)}dp\theta\right]\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{rMi}{L^2\omega}\exp\left[\frac{1}{v}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{R}{L\omega}p d\theta\right]p d\theta.$$

(1) M. Poloujadoff ; *loc. cit.*

Comme L(θ) est une fonction périodique toujours positive,

$$\frac{R}{\mathrm{L}(\theta)} \quad \text{et} \quad \int \frac{R}{\omega \mathrm{L}(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

sont des fonctions continues ;
on peut écrire

$$\frac{1}{v}\int_{\theta_o}^{\theta} \frac{R}{\omega \mathrm{L}(\theta)}\,p\mathrm{d}\theta = l(\theta - \theta_o) - \lambda(\theta_o) + \lambda(\theta)$$

et $$\exp\left[\frac{1}{v}\int_{\theta_o}^{\theta} \frac{R}{\omega L}\,p\mathrm{d}\theta\right] = k\,\mathrm{e}^{l\theta}\,[m + \mu(\theta)]$$

$$k = \exp\,[-l\theta_o - \lambda(\theta_o)]\,;$$

l est la valeur moyenne de la fonction

$$\frac{1}{v}\frac{R}{\omega \mathrm{L}(\theta)} = l + \lambda(\theta)\,;$$

$\lambda(\theta)$ est une fonction périodique de valeur moyenne nulle ; m est la valeur moyenne de la fonction

$$\mathrm{e}^{\lambda(\theta)} = m + \mu(\theta)\,;$$

$\mu(\theta)$ est une fonction de valeur moyenne nulle ; L_1,λ et μ ont évidemment la même période. D'où

$$j = -\frac{\mathrm{M}(\theta)}{\mathrm{L}(\theta)}\,I_{\mathrm{m}}\cos\omega t$$

$$+\frac{1}{v}I_{\mathrm{m}}\ \mathrm{e}^{\ l-\lambda(\theta)}\int_{\theta_o}^{\theta}\frac{r\mathrm{M}(\theta)}{\omega \mathrm{L}^2(\theta)}\,\mathrm{e}^{\lambda(\theta)+l}\cos\omega t p\mathrm{d}\theta.$$

$\mathrm{M}(\theta)L^{-2}(\theta)\mathrm{e}^{\lambda(\theta)}$ est une fonction périodique de période $2\pi/p$ et de valeur moyenne nulle ; le développement en série de Fourier de M(θ) ne possède que des termes d'ordre impair, ceux de $\mathrm{L}^{-2}(\theta)$ et $\mathrm{e}^{\lambda(\theta)}$ ne possèdent que des termes d'ordre pair, donc

$$\frac{\mathrm{M}(\theta)}{\mathrm{L}^2(\theta)}\,\mathrm{e}^{\lambda(\theta)} = \mathrm{A}(\theta) = \sum_{s\ \text{impair}} a_s \cos\,(s\theta + \varphi_s).$$

Or, par identification, on montre que

$$\int \mathrm{e}^{lx}\cos ax\cos bx\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{lx}\,[A\cos ax\cos bx + B\sin ax\sin bx + C\sin ax\cos bx]\ \mathrm{j}$$

donc, si l'on intègre

$$\mathrm{A}(\theta)\mathrm{e}^{l\theta}\cos\omega t = \mathrm{A}(\theta)\cos\frac{p\theta}{v\omega}\,\mathrm{e}^{l\theta}$$

on va trouver deux séries de Fourier, ne comportant que des termes d'ordre impair, dont l'une sera multipliée par $\mathrm{e}^{l\theta}\cos\omega t$ et l'autre par $\mathrm{e}^{l\theta}\sin\omega t$. Le tout est à multiplier à nouveau par $\mathrm{e}^{-\lambda(\theta)}\mathrm{e}^{-l\theta}$ les exponentielles $\mathrm{e}^{l\theta}$ et $\mathrm{e}^{-l\theta}$ s'éliminent.

Donc j(θ) est bien de la forme $\mathrm{S}(\theta)\sin\omega t + \mathrm{C}(\theta)\cos\omega t$ Il en résulte que

$$\sum_k j(a_k) = 0$$

et que la cage est bien équivalente à l'ensemble des cadres, pour la même raison qu'au pararaphe IV. C. de notre premier article. De plus, la relation

$$\sum_k j_k \mathrm{Q}(a_k) = 0$$

se retouve bien remplie, ce qui justifie la définition de l'inductance propre cyclique.

C. **Courtants et couples.** — Il serait très difficile de calculer S(θ) et C(θ) par la méthode qui a servi à établir leurs propriétés. Par contre, on peut remarquer que $\frac{\mathrm{d}(Mi)}{\mathrm{d}t}$ se met sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MI_{\mathrm{m}}\cos\omega t) = -M\omega I_{\mathrm{m}}\sin\omega t + \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{m}}\cos\omega t$$

$$= -E(\theta)\cos\,[\omega t - \varepsilon(\theta)].$$

En conservant la notation

$$r + \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R(\theta),$$

l'équation à résoudre se met sous la forme

$$Rj + L\frac{\partial j}{\partial t} = E\cos\,(\omega t - \varepsilon)$$

d'où $$\mathrm{j}(\theta, t) = \mathrm{J}(\theta)\cos\,[\omega t - \varepsilon(\theta) - \varphi(\theta)$$

avec $$\mathrm{J}(\theta) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}, \qquad \varphi(\theta) = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{L}{R}.$$

Après avoir calculé j en fonction du courant primaire que nous avons supposé égal à $i_1 = I_{\mathrm{m}}\cos\omega t$. Il nous reste maintenant à prouver que i_1 est bien de cette forme, puis à calculer I_{m} et la phase de I_1 par rapport à la tension d'alimentation U.

Le flux, créé par les courants rotoriques et traversant le primaire est égal, par définition à

$$\sum_{k=1}^{q}\mathrm{M}(a_k)j(a_k)$$

soit approximativement

$$\varphi = \frac{q}{2\pi}\sin\omega t\int_o^{2\pi}\mathrm{S}(\theta)\mathrm{M}(\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{q}{2\pi}\cos\omega t\int_o^{2\pi}\mathrm{C}(\theta)\mathrm{M}(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Donc, φ est bien une fonction sinusoïdale du temps lorsque i_1 l'est, et l'équation

$$U = r_1 i_1 + l\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

conduit bien à une expression sinusoïdale pour i_1.

Considérons le couple γ(θ) qui s'exerce sur un cadre placé à l'abscisse θ

$$\gamma(\theta) = j\left[j\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} + i_1\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}\right] = j^2\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} + ji_1\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}.$$

d'où le couple total

$$\Gamma = \frac{q}{2\pi}\int_o^{2\pi}\gamma(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

qui sera bien composé d'un terme constant et d'un terme pulsant à la fréquence double de celle du réseau.

IV. Étude de deux conditions de fonctionnement dans le cas particulier précédent. — A. Fonctionnement lorsque la vitesse est infinie. — Si l'on augmente indéfiniment la vitesse de la machine, en maintenant la tension aux bornes constante, l'équation du courant dans un cadre

$$rj + \frac{d}{dt} Lj = -\frac{d}{dt}(Mi_1)$$

se réduira à $\frac{d}{dt}(Lj) = -\frac{d}{dt}(Mi_1)$,

d'où $Lj = -Mi_1$ et $j = -\frac{M(\theta)}{L(\theta)} I_m \cos \omega t$.

Cette expression s'était déjà trouvée mise en évidence au paragraphe III. B. du présent article.

Le flux total créé par le courant j et traversant le primaire est approximativement égal à

$$-\frac{qI_m \cos \omega t}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M^2(\theta)}{L(\theta)} d\theta = -L' I_m \cos \omega t,$$

ce qui permet de calculer le courant primaire.

B. Fontionnement lorsque la vitesse est nulle : démarrage. — Ce cas est évidemment particulièrement important. Ici, pour chaque cadre, M et L sont des constantes, dont l'équation de courants se simplifie considérablement

$$Rj + L\, dj/dt = M\omega I_m \sin \omega t$$

$$j = \frac{M\omega I_m}{R^2 + L^2\omega^2} [R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t]$$

On voit ainsi apparaître les fonctions $S(\theta)$ et $C(\theta)$.

L'impédance de la cage, vue du primaire, est égale à

$$\sum \frac{M^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2} (R - jL\omega),$$

soit approximativement

$$\frac{Rq\omega^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M^2(\theta)}{R^2 + \omega^2 L^2(\theta)} d\theta - j \frac{q\omega^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{L(\theta) M^2(\theta)}{R^2 + \omega^2 L^2(\theta)} d\theta.$$

Quant au couple s'exerçant sur le cadre dont le centre est situé à l'abscisse θ, il est égal à

$$j \frac{d\varphi}{d\theta} = j \left[j \frac{dL}{d\theta} + i_1 \frac{dM}{d\theta} \right] = j^2 \frac{dL}{d\theta} + j i_1 \frac{dM}{d\theta}.$$

Comme $dL/d\theta$ est une fonction de valeur moyenne nulle, le premier de ces deux termes s'éliminera par sommation. Il reste donc

$$\Gamma_{total} = R \frac{\omega q}{2\pi} I^2_m \sin \omega t \cos \omega t \int_0^{2\pi} \frac{MM'}{R^2 + \omega^2 L^2} d\theta - \frac{q\omega^2 I^2_m}{2\pi} \cos^2 \omega t \int_0^{2\pi} \frac{MM'L}{R^2 + \omega^2 L^2} d\theta.$$

dont la valeur moyenne est

$$-\frac{q\omega^2 I^2_m}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{MM'L}{R^2 + \omega^2 L^2} d\theta.$$

V. Étude des courants dans une cage d'écureuil. — A. Remarque préliminaire. — Dans la première partie de ce travail, lors de l'étude des moteurs à entrefer constant, nous avions pu examiner le problème des cages d'écureuil parce que nous avions posé

$$2j_k - j_{k+1} - j_{k-1} = Kj_k$$

en supposant que K était une constante. La suite avait montré que cette notation était justifiée, et avait permis de calculer K, ce qui avait simplifié le problème en faisant disparaître, des équations les termes de couplage.

Examinons donc s'il est possible d'admettre que le système d'équations

$$-R_b j_{k-1} + 2(R_a + R_b) j_k - R_b j_{k+1} - l \frac{d}{dt}(j_{k-1} + j_{k+1}) + \frac{d}{dt} L_k j_k + \frac{d}{dt}(M_k i) = 0$$

admette une solution de la forme

$$\begin{aligned} j_k &= C(a_k) \cos \omega t + S(a_k) \sin \omega t \\ &= C_k \cos \omega t + S_k \sin \omega t \\ &= J(a_k) \cos [\omega t - \psi(a_k)] = J_k \cos (\omega t - \psi_k) \end{aligned}$$

$C(\theta)$ et $S(\theta)$ étant, comme précédemment, périodiques de période 2π, décomposables en série de Fourier, de valeur moyenne nulle, et ne comportant que des termes d'ordre impair.

En supposant qu'il en soit ainsi, nous allons chercher quelle est la relation entre

$$j_k \quad \text{et} \quad 2j_k - j_{k-1} - j_{k+1}.$$

A cet effet, nous allons exprimer $2j_k - j_{k-1} - j_{k+1}$ en fonction de j_k et de $\frac{\partial j_k}{\partial t}$.

Nous avons

$$j_{k-1} \cos (\psi_{k-1} - \psi_k) = \frac{C_k C_{k-1} + S_k S_{k-1}}{(C_k^2 + S_k^2)^{1/2}}$$

et des expressions analogues pour

$$j_{k+1} \cos (\psi_k - \psi_{k+1}), \qquad j_{k-1} \sin (\psi_{k-1} - \psi_k) \quad \text{et} \quad j_{k+1} \sin (\psi_k - \psi_{k+1}).$$

D'où

$$2j_k - j_{k+1} j_{k-1} = \frac{1}{(C_k^2 + S_k^2)^{1/2}} [C_k(2C_k - C_{k-1} - C_1)_{k+} + S_k(2S_k - S_{k-1} - S_{k+1})] j_k$$

$$+ \frac{1}{(C_k^2 + S_k^2)^{1/2}} [C_k(2S_k - S_{k-1} - S_{k+2}) - S_k(2C_k - C_{k-1} - C_{k+1})] \frac{\partial j_k}{\partial t} = \rho_1(a_k) j_k + \lambda_1(a_k) \frac{\partial j_k}{\partial t}.$$

On peut également montrer que

$$2j_k - j_{k-1} - j_{k+1} = \rho_2(a_k) j_k + \lambda_2(a_k) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} j_k$$

et que

$$\frac{\mathrm{d}^2 j_k}{\mathrm{d}t^2} = \rho_3(a_k) j_k + \lambda_3(a_k) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} j_k.$$

Dans toutes ces formules, ρ_1, ρ_2, ρ_3, λ_1, λ_2, λ_3 sont des fonctions de période π/p.

Autrement dit, si l'on cherche j sous la forme

$$S(\theta) \sin \omega t + C(\theta) \cos \omega t,$$

on doit pouvoir déterminer deux fonctions de périodes π/p, telles que les équations

$$R_b(2j_k - j_{k-1} - j_{k+1}) + l_b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2j_k - j_{k-1} - j_{k+1}) + 2R_a j_k + 2l_a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} j_k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_k j_k) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_k i) = 0.$$

et

$$[\rho(a_k) + 2R_a] j_k + [2l_a + \lambda(a_k)] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} j_k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_k j_k) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} M_k i) = 0$$

aient la même solution.

Or, nous voyons que cette deuxième équation possède les mêmes propriétés que celle qui a été étudiée au paragraphe III, B. Il en résulte que j est bien de la forme prévue.

Ainsi, nous pourrions définir une impédance cyclique des cadres d'une cage d'écureuil, si nous savions déterminer $\lambda(\theta)$ et $\rho(\theta)$. Le problème se trouverait alors ramené à celui des systèmes de cadres isolés, que nous savons résoudre. Malheureusement, nous ne sommes pas parvenu à trouver l'expression mathématique de ces fonctions, bien que ce travail soit vraisemblablement possible en utilisant un changement d'espace approprié. De toute manière, il est possible, comme nous allons le voir, de calculer $C(\theta)$ et $S(\theta)$.

B. Introduction au calcul par approximations successives. — Dans le cas où l'induit est formé de cadres isolés, on aurait pu calculer $S(\theta)$ et $C(\theta)$ en les reportant dans l'équation de fonctionnement, puis en séparant les termes en sin ωt de ceux en cos ωt. Ce qui donnerait, en posant

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = L' \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta} = M'.$$

$$\left.\begin{aligned} (r + v\omega L')C + \omega L S &= -v\omega L C' - v\omega M' I_m \\ -\omega L C + (r + v\omega L')S &= -\omega v L S' + \omega M I_m \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ceci conduit à la résolution d'un système linéaire de deux équations du premier ordre à deux inconnues

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= -vbx' - vA' \\ bx + ay &= -vby' + A \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

où a, b, c, A sont des fonctions données.

La méthode, par approximations successives consiste à se donner, à priori, deux valeurs de x et y pour une valeur donnée θ_1 de θ ; on a alors les valeurs de $x'(\theta_1)$ et $y'(\theta_1)$. D'où, en posant

$$\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta,$$
$$x(\theta_2) = x(\theta_1) + x'(\theta_1)\Delta\theta,$$
$$y(\theta_2) = y(\theta_1) + y'(\theta_1)\Delta\theta ;$$

on obtient ainsi, numériquement, la solution du système (1') avec les conditions initiales

$$\theta = \theta_1, \qquad x = x(\theta_1), \qquad y = y(\theta_1).$$

Nous savons que la solution permanente du système est constituée par deux fonctions périodiques que l'on obtiendra après amortissement du régime transitoire. Cet amortissement sera d'autant meilleur que l'on aura choisi judicieusement $x(\theta_1)$ et $y(\theta_1)$, ce qui est facile à faire si l'on étudie systématiquement les courbes correspondant à des valeurs successives de v.

En fait, il est inutile de se livrer à ces opérations, puisque, d'après le paragraphe III. C., on connaît la solution. Mais ces considérations vont nous servir.

En effet, si nous supposons que le nombre de barreaux, q, est très grand, on aura évidemment

$$2j_k - j_{k-1} - j_{k+1} \simeq 0.$$

C. Calcul par approximations succcessives. — Si on veut opérer comme précédemment, en tenant compte du couplage entre cadres, on écrira

$$\left.\begin{aligned} &R_b(2C_k - C_{k-1} - C_{k+1}) + l_b\theta'(2C'_k - C_{k-1} - C_{k+1}) \\ &+ \omega l_b(2S_k - S_{k-1} - S_{k+1}) + 2R_a C_k + 2l_a(\theta' C_k + \omega S_k) \\ &+ \theta' L'_k C_k + L_k(C'_k\theta' + \omega S_k) + \theta' M I_m = 0, \\ &R_b(2S_k - S_{k-1} - S_{k+1}) + l_b\theta'(2S'_k - S'_{k-1} - S'_{k+1}) \\ &- \omega l_b(2C_k - C_{k-1} - C_{k+1}) + 2R_a S_k + 2l_a(\theta' S_k - C_k\omega) \\ &+ \theta' L'_k S_k + L_k(\theta' S'_k - C_k\omega) - \omega M I_m = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Si q est le nombre de barreaux, on fera les approximations pour nq barreaux (n entier positif et grand), et on fera décroître n en faisant croître θ.

Le problème est ainsi ramené à un problème d'analyse numérique.

D. Emploi d'un réseau de calcul. — La cage d'écureuil constitue un réseau déformable. Mais nous pouvons remarquer que, à partir du moment où l'on a dérivé $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_k j_k)$, le problème se ramène simplement à l'étude d'un système polyphasé dyssymétrique, à caractéristiques constantes, soumis à un système de forces électromotrices déséquilibrées. Si q est suffisamment faible, on peut construire un modèle de ce réseau.

VI. Description des grandeurs caractéristiques de la machine. — **A. La fonction M(θ).** — Considérons un moteur tel que celui de la figure 21 de la seconde partie, et représentons, sur la figure 37a, la longueur de l'entrefer en fonction de l'angle électrique θ ; pour simplifier, on a négligé l'écartement des cornes et l'ouverture d'encoche de la bobine-écran. La courbe suivante représente à un facteur près l'induction $B_1(\theta)$ créée dans l'entrefer par le primaire.

Supposons maintenant que les barreaux de la cage soient inclinés de 20 degrés géométriques sur les génératrices du rotor, soit un biaisage de 40 degrés électriques ; en outre, nous supposerons que la cage comporte

18 barreaux, soit un espacement de 40 degrés électriques entre deux barres consécutives. Pour connaître la mutuelle inductance du primaire et d'un cadre, il

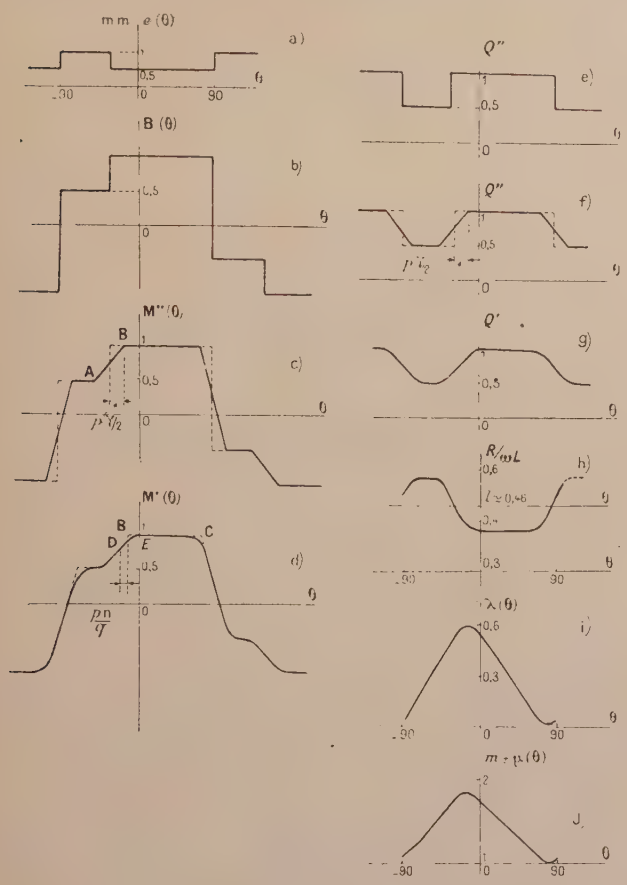

Fig. 37. — Courbes des grandeurs caractéristiques de la machine.

nous suffira de calculer, conformément aux notations du paragraphe IV. B. de notre premier article

$$\int_{-1}^{+1} \int_{\theta-\frac{p\pi}{q}}^{\theta+\frac{p\pi}{q}} B_1\left(\theta + \gamma\frac{x}{2}\right) dx d\theta.$$

Plus simplement, il suffira de calculer $M''(\theta)$, valeur moyenne de $B_1(\theta)$ dans l'intervalle $(\theta - p\gamma/2,\ \theta + p\gamma/2)$ puis $M'(\theta)$, valeur moyenne de $M''(\theta)$ dans l'intervalle $\left(\theta - \frac{p\pi}{q},\ \theta + \frac{p\pi}{q}\right)$, $M'(\theta)$ est alors égal à $M(\theta)$ à un facteur près. Il est facile de voir que $M''(\theta)$ se compose de segments de droites tels que AB. Quant à $M'(\theta)$, on peut montrer facilement qu'elle se compose de segments de droites raccordés par des arcs de paraboles tels que DB.

B. **Courbes $L(\theta)$ et $\mu(\theta)$.** — La figure 37e montre la courbe de perméance de l'entrefer en fonction de l'angle électrique θ ; pour avoir l'inductance propre d'un cadre, on a calculé la valeur moyenne Q'' de cette perméance le long d'une droite parallèle à un barreau, puis la valeur moyenne Q' de Q'' à l'intérieur d'un cadre. Comme précédemment, on est placé devant un ensemble simple de droites et d'arcs de parabole. Le tracé des courbes $R/\omega L(\theta)$ et $\lambda(\theta)$ se fait point par point. Enfin, la figure 37j montre $e^{\lambda(\theta)} = m + \mu(\theta)$ pour $v = 1$.

VII. Application au moteur à bobines-écrans. — D'après la formule du paragraphe V, on voit que les courants rotoriques sont constitués par la superposition des courants produits par le courant du primaire supposé seul, et par le courant des bobines-écrans supposé seul. A chacune de ces deux parties correspond un flux traversant respectivement le primaire et la bobine-écran. On écrira donc

$$U = (r_1 + jx_1)I_1 + jX_{13}(I_1 - I_3) + k_{31}I_3 + k_{11}I_1,$$
$$0 = (r_3 + jx_3)I_3 - jX_{13}(I_1 - I_3) + k_{13}I_1 + k_{33}I_3.$$

A une vitesse donnée, k_{11}, k_{33}, k_{31} et k_{33} sont des constantes. On pourra donc étudier la variation des courants et des couples en fonction de r_3 et de X_{13} comme dans le cas du moteur idéal de notre premier article.

Le calcul des coefficients k est évidemment assez long et pénible, du moins dans l'état actuel de la question ; mais on doit considérer que l'on traite ainsi d'un seul coup tous les harmoniques. Cette méthode n'apparaît donc pas du tout comme beaucoup plus difficile à appliquer que la méthode exposée et dans notre second article.

Conclusion.

La présente Étude a été menée au Laboratoire central des Industries électriques. Elle aboutit aux résultats suivants :

a) une théorie complète des moteurs asynchrones à cage d'écureuil à entrefer constant ;

b) une méthode de calcul simple pour le moteur monophasé à bobine écran, à entrefer constant, sans pont magnétique saturé. Cette méthode permet d'introduire les harmoniques de distribution ;

c) une théorie générale des moteurs à induction à cage d'écureuil et à entrefer variable.

Bibliographie

[1] J. Fallou. *Cours d'électrotechnique générale*, édité par la librairie Gauthier-Villars, à Paris (1938).

[2] F.-T. Chapman ; Air gap field in the polyphase induction motor. *Electrician*, 18 et 25 août 1916, t. 77, p. 663-667 et 705-708. — *Ibid.* 1er septembre 1916, p. 730-724 ; 29 septembre 1916, p. 936-938. — *Ibid.*, 6 et 13 octobre 1916, t.78, p. 9-12 et 49-50.

[3] E.-E. Dreese ; Synchronous motor effects in induction machines. *Trans. A.I.E.E.*, novembre 1930, t. 49, p. 938-941.

[4] M. Krondl ; La dispersion différentielle dans les machines d'induction. *R.G.E.*, 10 mars 1928, t. 23, p. 433-450, 17 mars 1928, p. 479-496.

[5] P.-H. Trickey ; Induction motor resistance ring width. *Elect. Engng.*, février 1936, t. 55, p. 144-150.

[6] R. Beach ; A physical conception of single phase induction motor operation. *Elect. Engng*, février 1926, t. 63, p. 254-263.

[7] J. Reyval ; Moteurs monophasés à collecteur à vitesse pratiquement constante. *La Lumière électrique*, 8 avril 1911, (2e série), p. 13-14.

[8] C.-G. Veinott. *Fractional horsepower electric motors*, édité par la librairie McGraw-Hill, à New-York.

C.-G. Veinott. Les moteurs électriques à puissance fractionnaire, traduit de l'anglais par G. Soulier, édité par la librairie Dunod, à Paris (1954).

[9] M. Beyaert. *Les petits moteurs électriques*, édité par la librairie Dunod, à Paris (1958).

[10] P.-H. Trickey ; An analysis of the shaded-pole motor. *Elect. Engng.*, septembre 1936, t. 55, p. 1007-1014.

[11] P.-H. Trickey ; Performance calculation on shaded-pole motors. Abstract. *Elect. Engng.*, septembre 1947, t. 56, p. 926.

[12] C.-G. Veinott ; Discussion on a Trickey's paper. *Elect. Engng*, mai 1937, t. 56, p. 612-613.

[13] H.-L. Bojer. *Predetermination of shaded pole induction motor performance*, édité par F. Brunks, à Torndheim (Norvège) (1948). – *Det Konjelige norske videnskaber selskabs skrifter* 1947, nº 5.

[14] L. Dreyfus ; Till bedomningen av ing. Bojers doctorsavhandling « Predetermination of shaded-pole induction motor-performance. » *Det klg norske videnskabers selskabs skrifter* 1948, nº 1.

[15] E.-E. Kimberly ; The field fluxes of the shaded-pole motor. *Trans. A.I.E.E.*, septembre 1949, t. 68, p. 49-72.

[16] E. Morath ; A mathematical theory of shaded-pole motors. *Transaction of the royal Institute of Technology* (Stockholm, Suède), 1949, nº 26.

[17] J. Kucera ; Moteur asynchrone monophasé avec l'enroulement auxiliaire en court-circuit. *R.G.E.*, mai 1949, t. 58, p. 185-191.

[18] S.-S.-L. Chang ; Equivalent circuit and their application in designing shaded-pole motors. *Elect. Engng.*, juin 1951, t. 70, p. 479.

[19] Toshio Fujii ; Performance analysis of shaded-pole induction motor. *Hitachi Review* (Japon), août 1953, p. 79-86.

[20] W. Schuisky ; Beitrag zur Theory des einphasen Spaltmotors. *E.u.M.*, 1er mars 1953, t. 70, p. 99-114.

[21] M. Poloujadoff ; Note sur le calcul des moteurs monophasés à bobine-écran. *C. R. Ac. Sc.*, 5 août 1957, t. 245, p. 648-650.

[22] F.-N. Suhr ; Theory of shaded-pole induction motors *Trans. A.I.E.E.*, 1944, t. 76, part. III.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Étude des servomécanismes non linéaires par la méthode du premier harmonique.

Vu et approuvé :
Paris, le 23 septembre 1959.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
J. Pérès.

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean Sarrailh.

IMPRIMERIE CHAIX
126, rue des Rosiers - St-OUEN
— 387 HA 50-2-60 —